Hoàng Chúng (Chủ biên)
Hoàng Quý - Hoàng Tuỵ

TÌM HIỂU FRACTAL

một hình học mới lạ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chào 1000

Mến tặng bạn

Ad - Otoanloc

Ô TOÁN HỌC

Hoàng Chúng (Chủ biên)
Hoàng Quý - Hoàng Tuỵ

TÌM HIỂU
FRACTAL
một hình học mới lạ

www.facebook/otoanhoc2911

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập: VŨ DƯƠNG THUỴ

Biên tập:

NGUYỄN CAO THẮNG

Trình bày bìa:

HÀ TUỆ HƯƠNG

Biên tập kĩ thuật:

TRẦN THÀNH TOÀN

Sửa bản in:

HẠNH HOA

$\frac{517}{GD-03}$ 1043/7 – 03 Mã số: 8H995m3-CNH

LỜI NÓI ĐẦU

Rất nhiều người, khi có dịp làm quen với Hình học fractal, đã nhanh chóng thích thú, có khi đến say mê nó. Lí do có nhiều, mức độ và trình tự của các lí do đó phụ thuộc vào mỗi người, nhưng tựu trung có thể nêu ra (chắc chưa đầy đủ) các lí do sau đây.

Một là Hình học fractal ra đời và phát triển với nhiều ý tưởng mới lạ, độc đáo, gợi cho ta một cách nhìn thiên nhiên khác với cách nhìn quá quen thuộc do Hình học Euclid đưa lại từ mấy nghìn năm nay.

Hai là các fractal thường được xây dựng với những quy tắc khá đơn giản, nhưng đưa đến những hình ảnh rất lạ mắt, rất đẹp. Nhiều chương trình đồ họa vi tính (như Corell Draw chẳng hạn) đều giới thiệu nhiều fractal đẹp.

Ba là Hình học fractal có nhiều ứng dụng phong phú, đa dạng, có khi rất bất ngờ, vào rất nhiều lĩnh vực khác nhau, từ các ngành kĩ thuật như Xây dựng, Khai thác dầu khí, Chế tạo dụng cụ chính xác, v.v... đến Sinh lí học, Ngôn ngữ học, Âm nhạc, v.v...

Bốn là Hình học fractal là một ngành toán học cao cấp, hiện đại, nhưng một số ý tưởng của nó, một số kết quả đơn giản của nó có thể trình bày thích hợp cho bạn đọc rộng rãi, có trình độ toán học phổ thông. Chính vì vậy, gần đây ở nhiều nước sách giáo khoa đã giới thiệu một số fractal ở những chương thích hợp, và đã có giáo trình tự chọn, tài liệu ngoại khoá về fractal cho học sinh phổ thông cơ sở và phổ thông trung học đọc thêm.

Cuốn sách nhỏ này cố gắng cùng bạn đọc bước vào vườn hoa đầy hấp dẫn của Hình học fractal. Về kiến thức toán học, chỉ cần chủ yếu là kiến thức lớp 9 và hiểu biết đơn giản về logarit ở lớp 11*. Khái niệm số phức được dùng đến trong chương cuối. Khi gặp những kiến thức toán học mà bạn chưa biết, bạn có thể tạm bỏ qua và điều này không ảnh hưởng nhiều đến việc hiểu được các phần sau.

Tác giả cuốn sách này thật ra chỉ có một người:

HOÀNG CHÚNG.

Nhưng không may sách viết sắp xong thì tác giả lâm bệnh và đột ngột từ trần. Hai anh em chúng tôi đã tiếp tục công việc hoàn thành bản thảo để cuốn sách có thể ra mắt bạn đọc hôm nay. Đây cũng là một kỉ niệm nhỏ về mối quan tâm chung của cả ba chúng tôi đối với các vấn đề đổi mới giảng dạy Toán ở bậc Phổ thông để tăng cường rèn luyện đầu óc sáng tạo, theo kịp trào lưu hiện nay trên thế giới.

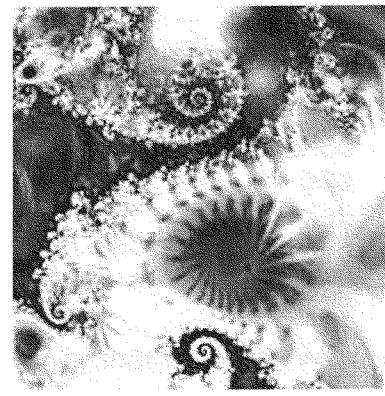
Tp. Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2003

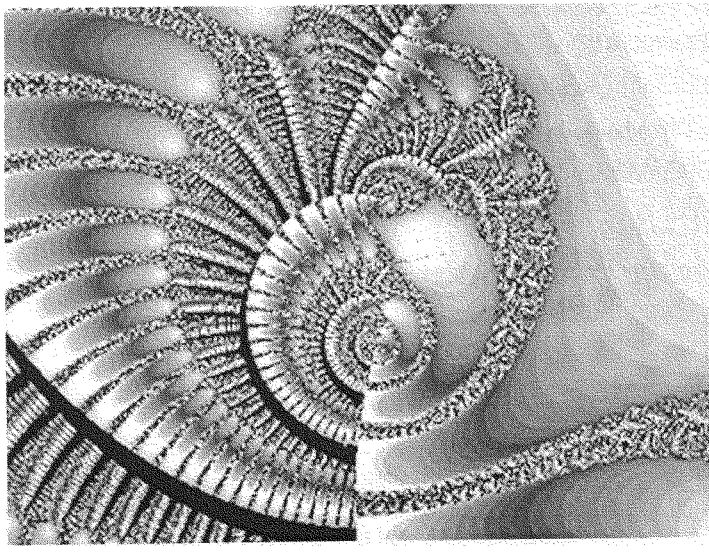
CÁC TÁC GIẢ

*** Các kiến thức toán học đó cũng có thể tìm đọc ở các mục : giới hạn, logarit, số phức, trong cuốn "Từ điển Toán học thông dụng" của Ngô Thúc Lanh, Đoàn Quỳnh và Nguyễn Đình Trí, Nhà xuất bản Giáo dục, 2000.**

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
1. Hai đường cong kì lạ	7
2. Những hòn đảo có bờ biển dài vô hạn	11
3. Những hình chỉ có xương không có thịt	16
4. Tự đồng dạng và thứ nguyên phân số - đặc trưng phổ biến của nhiều fractal	22
5. Đám bụi Cantor	30
6. Đường cong lấp đầy một hình vuông	33
7. Mã di truyền hình học	35
8. Fractal tự afin	39
9. Fractal ngẫu nhiên	48
10. Tập Mandelbrot	50
11. Benoit Mandelbrot: người khai sinh Hình học fractal	52
PHỤ LỤC	55
TÀI LIỆU THAM KHẢO	60





1. HAI ĐƯỜNG CONG KÌ LẠ

Hình học Euclid được giới thiệu ở trường trung học với việc khảo sát các hình đa giác, hình tròn, hình đa diện, hình cầu, hình nón, v.v... Hơn hai nghìn năm qua, Hình học Euclid đã có tác dụng to lớn đối với nền văn minh nhân loại, từ việc đo đạc ruộng đất đến vẽ đồ án xây dựng nhà cửa, chế tạo vật dụng và máy móc, từ việc mô tả quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời đến mô tả cấu trúc của nguyên tử. Tuy nhiên, qua Hình học Euclid ta nhìn mọi vật dưới dạng "đều đặn", "trơn nhẵn". Với những hình dạng trong Hình học Euclid ta không thể hình dung và mô tả được nhiều vật thể rất quen thuộc chung quanh như quả núi, bờ biển, đám mây, nhiều bộ phận trong cơ thể người (phổi, mạch máu,...) v.v... là những vật cụ thể cực kì không đều đặn, không trơn nhẵn mà rất xù xì, gồ ghề. Một ví dụ đơn giản: bờ biển đảo Phú Quốc dài bao nhiêu? Ta không thể có được câu trả lời. Nếu dùng cách đo hình học quen thuộc, dù thước đo có nhỏ bao nhiêu đi nữa ta cũng đã bỏ qua những lồi lõm giữa hai đầu của thước đo ấy, nhất là chỗ bờ đá nhấp nhô. Và với thước đo càng nhỏ ta có chiều dài càng lớn và có thể là ... vô cùng lớn!

Những đường cong tương tự các đường cong sau đây có thể phản ánh những đối tượng như đường bờ biển, hình dáng các đám mây, các dãy núi nhấp nhô, ...

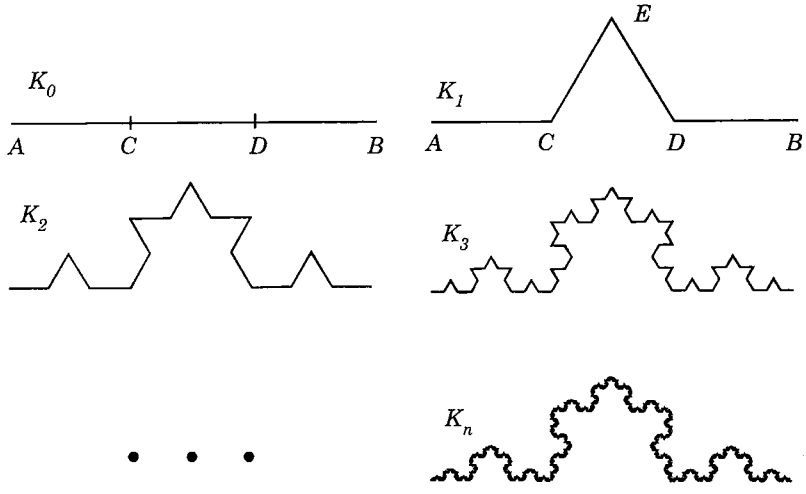
Đường cong von Kock

Lấy một đoạn thẳng AB bất kì, gọi là *hình ban đầu* K_0 (Hình 1).

BƯỚC 1. Chia AB ra ba phần bằng nhau ($AC = CD = DB$), rồi dựng tam giác đều CED trên đoạn thẳng ở giữa (CD), sau đó xoá cạnh CD đi. Ta được hình K_1 (Hình 1). Quy tắc biến đổi từ

hình ban đầu K_0 thành hình K_1 gọi là *quy tắc sinh*; hình K_1 cũng được gọi là *tập sinh*.

Trên hình K_1 điểm E nằm phía trên đoạn thẳng nằm ngang AB. Ta nói đã *áp dụng quy tắc sinh về phía trên* của AB.



Hình 1. Đường von Kock

BƯỚC 2. Lặp lại quy tắc sinh này cho bốn đoạn của K_1, ta được K_2. Chú ý rằng đối với AC và BD thì áp dụng quy tắc sinh về phía điểm E, còn đối với hai đoạn CE và ED thì áp dụng quy tắc sinh về phía ngoài của tam giác CED đã dựng trước đó.

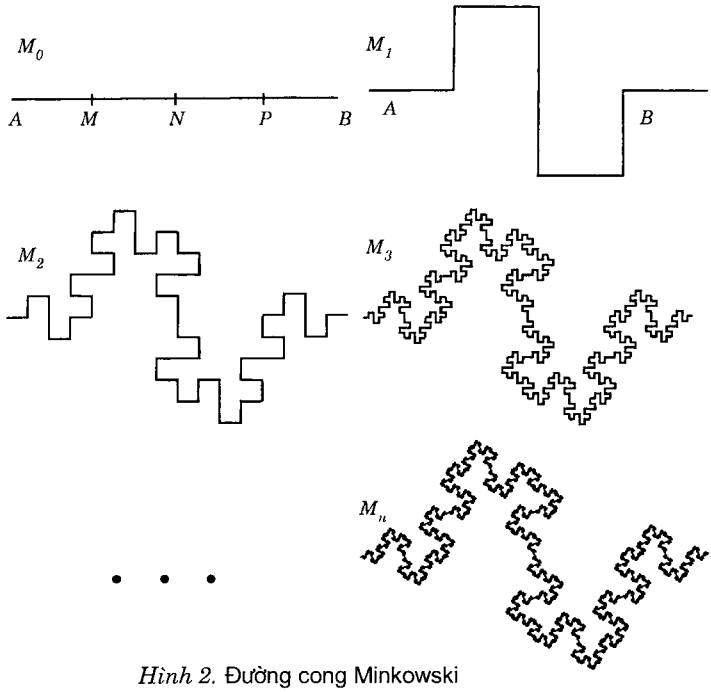
BƯỚC 3. Lặp lại quy tắc sinh như đã mô tả ở các Bước 1 và 2, với 16 đoạn thẳng của K_2 ta được K_3.

Lặp lại quy tắc vô hạn lần, ta được đường cong K mà K_n là một hình ảnh gần đúng. Đường cong này được gọi là *Đường cong von Kock*, theo tên nhà toán học Thụy Điển Helge von Kock (1870-1920) đã nghĩ ra nó năm 1905.

Đường cong Minkowski

Hình ban đầu M_0: đoạn thẳng nằm ngang AB (Hình 2).

BƯỚC 1 (*quy tắc sinh*). Chia đoạn thẳng AB thành bốn đoạn nhỏ bằng nhau, với các điểm M, N, P. Trên đoạn thẳng MN dựng lên phía trên một hình vuông $MNQR$ và trên đoạn thẳng NP dựng xuống phía dưới một hình vuông $NPST$, sau đó xoá hai cạnh MN và NP, ta được hình M_1 (Hình 2). M_1 là *tập sinh*, gồm tám đoạn thẳng trong đó bốn đoạn thẳng song song với AB (đoạn thẳng AB coi như song song với AB) và bốn đoạn thẳng vuông góc với AB.



Hình 2. Đường cong Minkowski

BƯỚC 2. Lặp lại quy tắc sinh cho mỗi đoạn thẳng của M_1, ta có M_2. Ở đây, đối với mỗi đoạn thẳng song song với AB, áp dụng quy tắc sinh như đối với đoạn thẳng AB. Đối với mỗi đoạn

thẳng vuông góc với AB, thì quay M_0 quanh A một góc 90° ngược chiều kim đồng hồ rồi áp dụng quy tắc sinh như với đoạn AB.

BƯỚC 3. Lặp lại quy tắc sinh như đã mô tả ở các Bước 1 và 2 đối với mọi đoạn thẳng thuộc M_2 ta được M_3.

Sau n bước lặp ta được hình M_n. Khi $n \to +\infty$ ta được một đường cong gọi là *Đường cong Minkowski* (Herman Minkowski, 1864-1909, nhà toán học Lituani).

Dễ thấy rằng Đường cong von Kock cũng như Đường cong Minkowski là những đường cong có hai đầu mút, nhưng *có chiều dài vô hạn.*

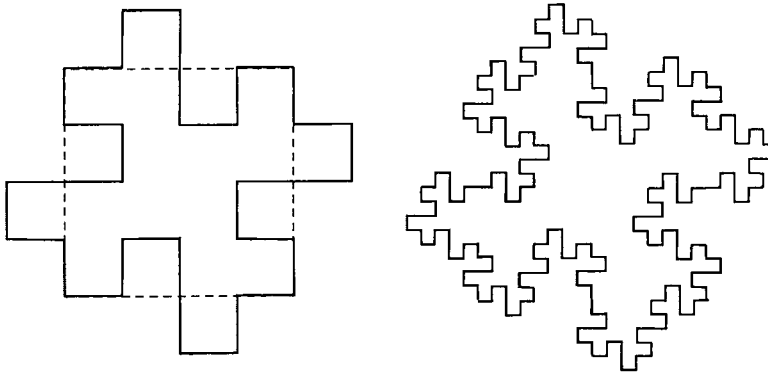
Thực vậy, tập sinh của Đường cong Minkowski gồm tám đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng bằng $\frac{1}{4}$ đoạn thẳng ban đầu, tức là tập sinh dài gấp đôi ($8 \times \frac{1}{4} = 2$) đoạn thẳng ban đầu. Sau Bước 1, hình có chiều dài bằng 2 (giả sử $AB = 1$ đơn vị dài), sau Bước 2 hình có chiều dài $2 \times 2 = 2^2$, sau bước n thì hình có chiều dài 2^n. Khi $n \to +\infty$ thì $2^n \to +\infty$, nghĩa là Đường cong Minkowski có chiều dài vô hạn.

Tập sinh của Đường cong von Kock gồm bốn đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng bằng $\frac{1}{3}$ đoạn thẳng ban đầu tức là tập sinh dài bằng $\frac{4}{3}$ đoạn thẳng ban đầu. Như vậy, sau mỗi bước xây dựng Đường cong von Kock thì hình có chiều dài tăng lên theo tỉ số $\frac{4}{3}$, sau n bước hình có chiều dài $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ (giả sử $AB = 1$ đơn vị dài). Mà $\frac{4}{3} > 1$ nên $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty$, nghĩa là Đường cong von Kock dài vô hạn.

2. NHỮNG HÒN ĐẢO CÓ BỜ BIỂN DÀI VÔ HẠN

Hòn đảo Minkowski

Lấy một hình vuông *ABCD*. Biến đổi mỗi cạnh hình vuông thành một Đường cong Minkowski ta được một hình gọi là Hòn đảo Minkowski.



Hình 3. Hòn đảo Minkowski

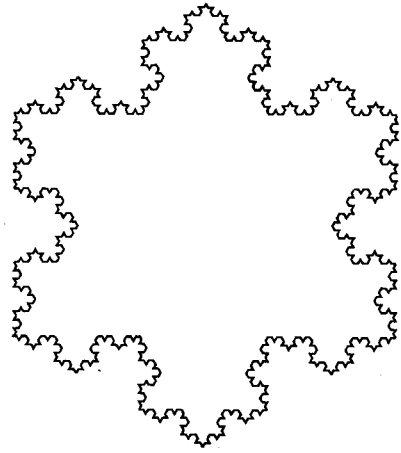
Vì Đường cong Minkowski có chiều dài vô hạn nên Hòn đảo Minkowski có chu vi dài vô hạn, nhưng diện tích Hòn đảo Minkowski chỉ bằng diện tích hình vuông ban đầu. Hình 3 cho thấy rõ nếu hình vuông ban đầu có cạnh a (chu vi $4a$, diện tích a^2) thì sau Bước 1 ta được một hình có chu vi gấp đôi, nhưng diện tích vẫn là a^2. Điều này luôn đúng sau mọi bước xây dựng Hòn đảo Minkowski (Hình 3 cho thấy hình thu được sau Bước 3).

Bông tuyết von Kock

Bông tuyết von Kock là một ví dụ khác về một hình có diện tích giới hạn nhưng chu vi dài vô hạn.

Lấy hình ban đầu là một tam giác đều và xây dựng trên mỗi cạnh của tam giác một đường cong von Kock như Hình 4 ta được một hình gọi là *Bông tuyết von Kock*.

Vì Đường cong von Kock dài vô hạn nên Bông tuyết von Kock có chu vi dài vô hạn. Sau mỗi bước xây dựng hình, chu vi Bông tuyết von Kock tăng lên theo tỉ số $\frac{4}{3}$, diện tích của hình cũng tăng lên, nhưng diện tích luôn nhỏ hơn (bị chặn bởi) diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác đều ban đầu, vì vậy *Bông tuyết von Kock có diện tích hữu hạn.*



Hình 4. Bông tuyết von Kock

Tương tự như vậy trong không gian ta có thể xây dựng những *hình có diện tích bề mặt rộng vô hạn nhưng chỉ chiếm một thể tích hữu hạn*, như trong thí dụ sau đây.

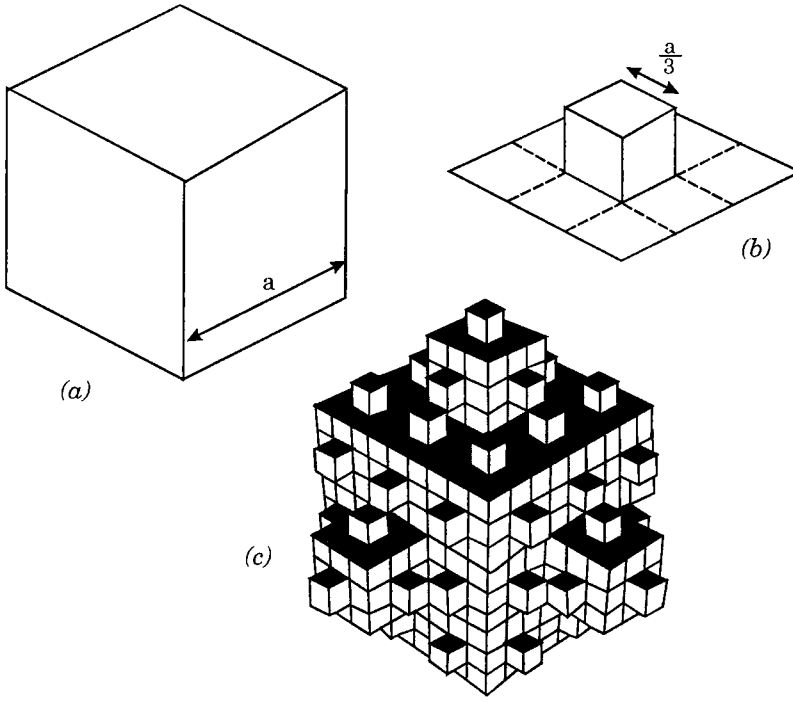
Hình ban đầu là một lập phương có cạnh bằng a (Hình 5).

BƯỚC 1 (*quy tắc sinh*). Chia mỗi mặt của hình ban đầu ra

chín hình vuông bằng nhau (cạnh $\frac{a}{3}$), xoá hình vuông ở chính giữa và thay vào đó bằng một hình lập phương cạnh $\frac{a}{3}$ (dựng ra phía ngoài của hình lập phương ban đầu như trên Hình 5(b)).

BƯỚC 2. Lặp lại quy tắc sinh đối với mọi hình vuông nhỏ có được ở Bước 1.

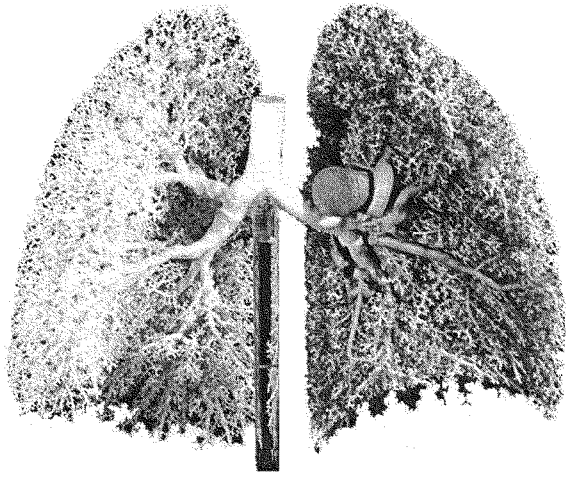
Hình 5(c) cho thấy hình có được sau Bước 3.



Hình 5. Khối đa diện có bề mặt vô hạn

Sau mỗi bước diện tích toàn phần của hình lập phương tăng lên theo tỉ số $\frac{13}{9}$, vì mỗi hình vuông sẽ gồm (9 - 1) + 5 = 13 hình vuông nhỏ hơn, thay vì 9 hình vuông nhỏ như trước đó. Sau n

bước diện tích tăng lên $\left(\frac{13}{9}\right)^n$. Vì $\frac{13}{9} > 1$ nên $\left(\frac{13}{9}\right)^n \to +\infty$ $n \to +\infty$. Lúc đó ta có một mặt có diện tích vô hạn, nhưng chỉ chiếm một thể tích giới hạn (do không thể lớn hơn thể tích hình cầu ngoại tiếp hình lập phương ban đầu).

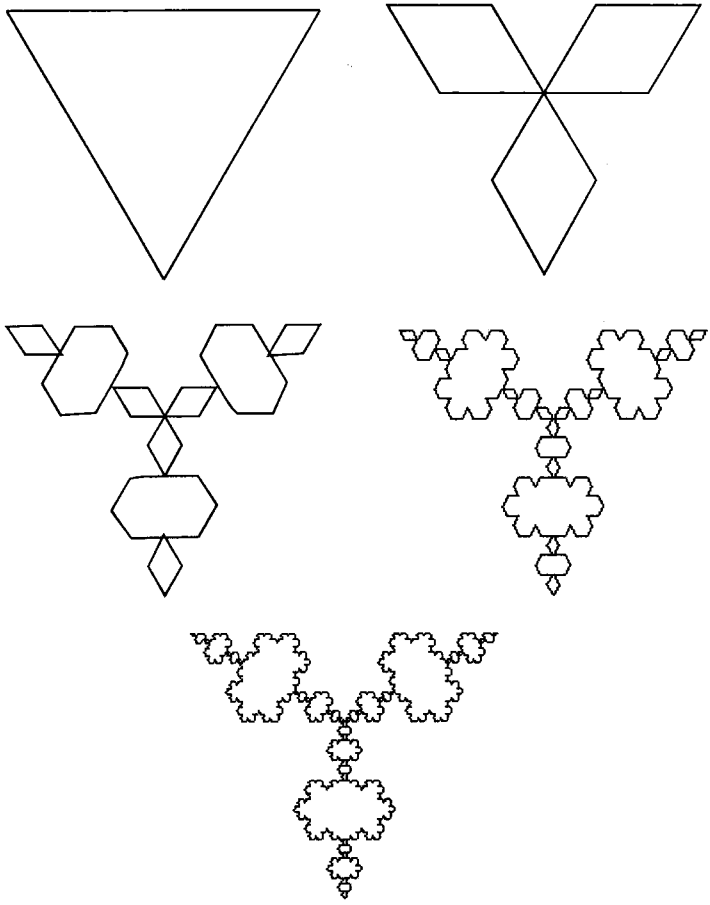


Hình 6. Hình phổi tự đồng dạng

Những fractal được xây dựng như trên đây phản ảnh cấu trúc của một số tổ chức trong thiên nhiên, đặc biệt là ngay trong cơ thể chúng ta. Buồng phổi của ta có khoảng 300 triệu phế nang (Hình 6), là nơi tiếp xúc, trao đổi không khí với hệ thống mao mạch (chuyển dưỡng khí vào máu và đưa thán khí cùng những khí độc khác ra ngoài cơ thể), các phế nang này chiếm một diện tích rất lớn (hơn $100m^2$!) so với thể tích của phổi. Để hấp thu tốt các dưỡng chất nuôi cơ thể, ruột non nằm gọn trong ổ bụng, nhưng có một hệ thống dung mao ngoằn ngoèo, nhiều lớp, có tổng diện tích lên tới khoảng $250m^2$!

Trở lại Bông tuyết von Kock. Dễ thấy rằng khi xây dựng Bông tuyết von Kock ta đã biến đổi mỗi cạnh của tam giác đều ban đầu thành một đường cong von Kock về phía ngoài (*miền ngoài*) của tam giác ấy, mọi tam giác mới được dựng ở mỗi bước đều nằm ở miền ngoài của hình đã có trước đó.

Bây giờ nếu ta dựng đường cong von Kock về phía trong (*miền trong*) của tam giác ban đầu (ở mỗi bước) thì mọi tam giác được dựng đều nằm ở *miền trong* của hình đã có và ta có một hình mới, khác hẳn, gọi là *Đối bông tuyết von Kock* (Hình 7).



Hình 7. Đối bông tuyết von Kock

Bạn đọc có thể thấy rõ các hình này trên Website:

http://math.rice.edu/~lanius/frac/anti.html

www.facebook/otoanhoc2911

3. NHỮNG HÌNH CHỈ CÓ XƯƠNG KHÔNG CÓ THỊT

Những năm cuối Thế kỉ XIX đầu Thế kỉ XX là một thời kì phát triển sôi động của toán học. Một mặt, người ta phát hiện ra một loạt nghịch lí kiểu như nghịch lí nói dối: nếu có ai đó tuyên bố "tôi đang nói dối đây" thì anh ta nói thật hay nói dối? (Nếu anh ta nói thật thì câu nói đó có nghĩa anh ta nói dối. Nhưng nếu anh ta nói dối thì câu nói đó lại có nghĩa anh ta nói thật. Đằng nào cũng mâu thuẫn.) Mặt khác, sau khi lí thuyết tập hợp của Cantor ra đời, được chào đón như một công cụ nghiên cứu vô cùng hiệu lực, thì các nhà toán học lại nghĩ ra nhiều tập hợp kì dị khó tin, những tập hợp này cùng với những nghịch lí nói trên đã gây không ít hoang mang trong làng nghiên cứu. Phải đợi nhiều năm sau, các tập hợp ấy mới dần dần được chấp nhận có chỗ đứng chính thức trong toán học. Một trong những tập hợp ấy là tam giác Sierpinski do nhà toán học Ba Lan Waclaw Sierpinski (1882-1969) đưa ra từ 1915 nhưng hơn 60 năm sau người ta mới thấy hết ý nghĩa của nó.

Tam giác Sierpinski (hay sàng Sierpinski)

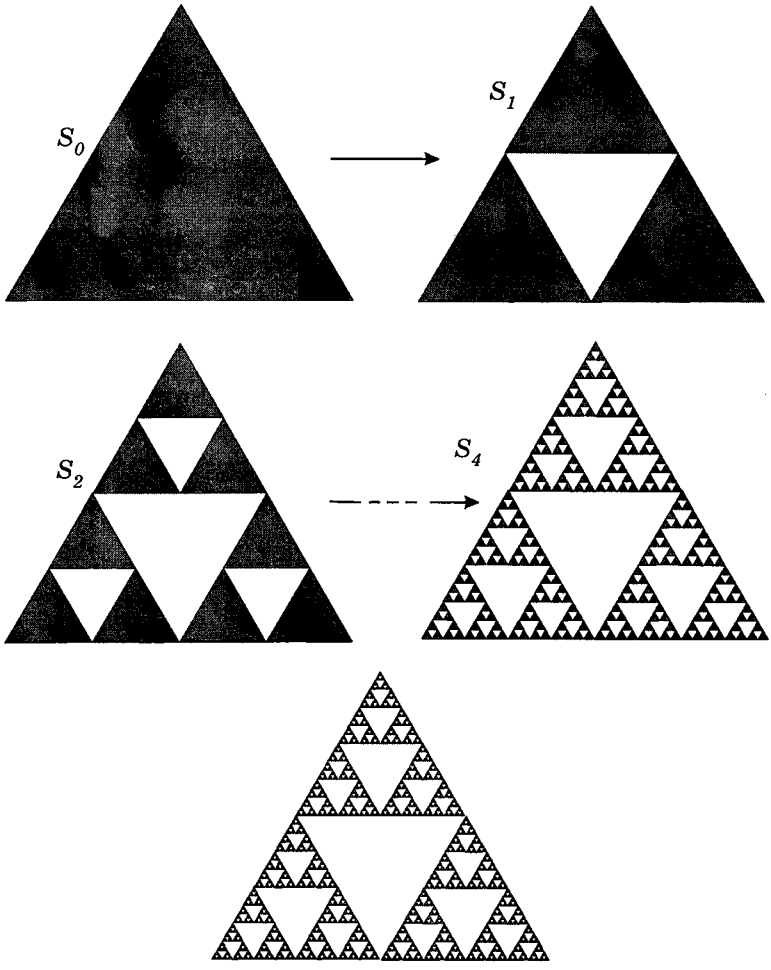
Lấy *hình ban đầu* là một tam giác đều S_0 (Hình 8).

BƯỚC 1 (*quy tắc sinh*). Chia S_0 ra 4 hình tam giác đều bằng nhau rồi xoá đi tam giác đều ở giữa, ta được S_1.

BƯỚC 2. Lặp lại quy tắc sinh đối với ba tam giác đều của S_1, ta được S_2.

Lặp lại quy tắc sinh đối với chín tam giác đều của S_2 ta được S_3, v.v....

Lặp lại quy tắc sinh vô hạn lần ta được một hình gọi là *Tam giác Sierpinski* (còn gọi là *Sàng Sierpinski* hay *Tấm đệm Sierpinski*).



Hình 8. Tam giác Sierpinski

Nếu có điều kiện, bạn hãy vào địa chỉ sau trên Internet:

http://math.rice.edu/~lanius/fractals/sierjava.html,

bạn sẽ thấy các tam giác trong Hình 8. Kích chuột liên tiếp vào dấu ▶ bạn sẽ thấy xuất hiện các hình theo từng bước hình thành tam giác Sierpinski. Chú ý rằng khác với cách trình bày trên Hình 8, ở đây *tam giác xoá đi được tô màu.*

Ở trên đã thấy chuyện lạ là Đường cong von Kock và Đường cong Minkowski, được xây dựng từ hình ban đầu là một đoạn thẳng, lại có chu vi dài vô hạn. Bây giờ chuyện bất ngờ khác là Tam giác Sierpinski, được xây dựng từ hình ban đầu là một tam giác, lại có diện tích nhỏ vô hạn. Thực vậy, tập sinh của Tam giác Sierpinski có diện tích bằng $\frac{3}{4}$ (coi như diện tích hình ban đầu bằng 1 đơn vị), do đó sau n bước lặp, ta được hình có diện tích bằng $\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Mà $\frac{3}{4} < 1$ nên $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ khi $n \to +\infty$, lúc đó ta có tam giác Sierpinski với diện tích bằng 0. Như vậy, Tam giác Sierpinski coi như "chỉ có xương, không có thịt".

Bằng phương pháp cắt bỏ một phần thích hợp của một hình ban đầu, có thể xây dựng những hình *tương tự Tam giác Sierpinski* theo nhiều kiểu khác nhau.

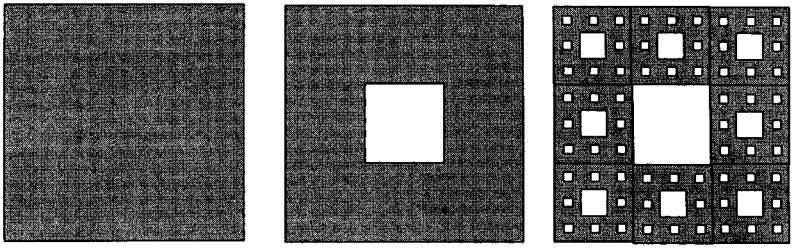
Tấm thảm Sierpinski

Lấy *hình ban đầu* là một hình vuông (thay vì một tam giác đều).

BƯỚC 1 (*quy tắc sinh*). Chia hình vuông ra chín hình vuông **bằng nhau, rồi xoá đi hình vuông ở chính giữa (Hình 9).**

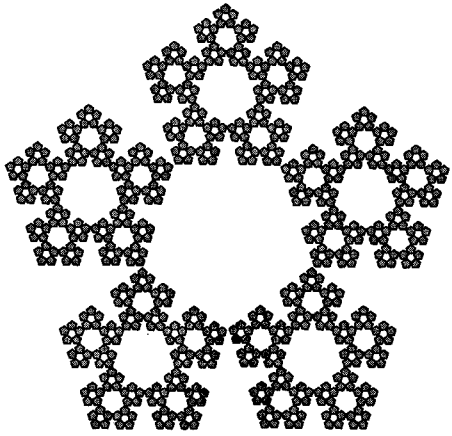
BƯỚC 2. Lặp lại quy tắc sinh đối với 8 hình vuông nhỏ.

Tương tự như vậy với các bước tiếp theo. Trên Hình 9 ta có các Bước 1, 2 và Bước 3.



Hình 9. Thảm Sierpinski

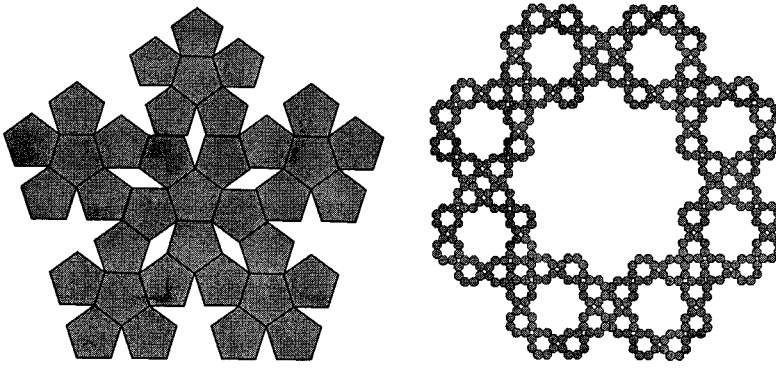
Sau *vô hạn bước lặp* ta được một hình gọi là *Tấm thảm Sierpinski vuông*



Hình 10. Đệm ngũ giác

Nếu lấy hình ban đầu là ngũ giác đều, lục giác đều, ..., thì ta có các *Tấm đệm Sierpinski ngũ giác, lục giác,...* Hình 10 cho thấy một tấm đệm ngũ giác, xây dựng từ hình ban đầu là một ngũ giác đều với tập sinh gồm năm ngũ giác đều đặt ở năm góc.

Nếu hình ban đầu là một ngũ giác đều nhưng tập sinh gồm sáu ngũ giác đều thì sau hai bước lặp ta có Hình 11(a). Hình 11(b) là kết quả bước lặp thứ hai xây dựng tấm đệm bát giác.



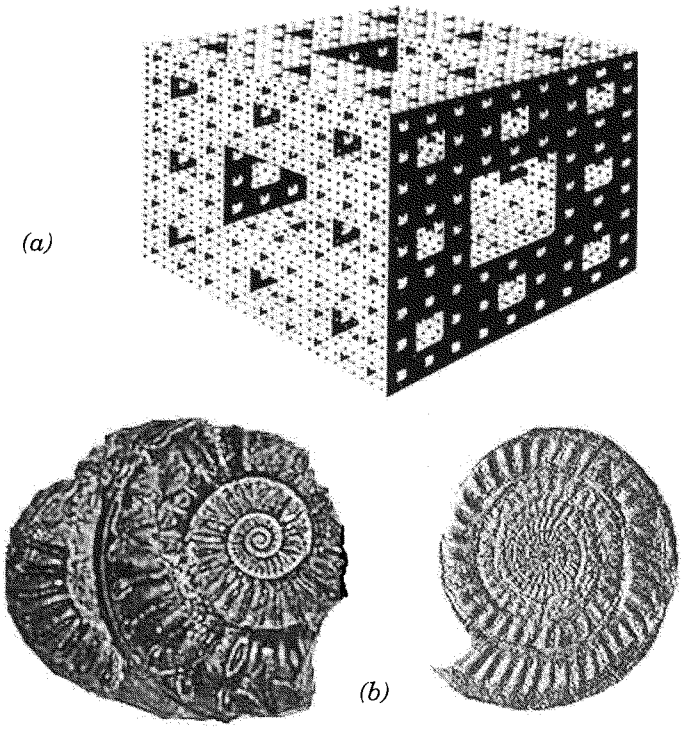
Hình 11. Đệm ngũ giác II (a) và đệm bát giác (b)

Bọt biển Menger

Có thể mở rộng tấm thảm Sierpinski ra không gian với hình ban đầu là một lập phương để có bọt biển Menger.

Hình ban đầu là một lập phương.

Trên mỗi mặt của lập phương, xây dựng một tấm thảm Sierpinski, nhưng mỗi khi xoá một hình vuông thì đục trong lập phương cả một hình hộp có hai đáy là hai hình vuông tương ứng ở hai mặt đối diện của lập phương. Kết quả ta được một hình có tên là *Bọt biển Menger* như Hình 12(a), do kiến trúc sư người Đức Karl Menger đưa ra năm 1979.



Hình 12. Bọt biển Menger (a) và vỏ ốc lạ (b)

Trong thiên nhiên, có thể tìm thấy hình ảnh của tam giác Sierpinski trên một cái vỏ ốc (Hình 12(b)). Tam giác Sierpinski và mở rộng của nó ra không gian là những hình có diện tích hoặc thể tích bằng 0, là mô hình của một số công trình kiến trúc nổi tiếng (như tháp Eiffel ở thủ đô Paris của nước Pháp), dùng các kết cấu tam giác, không bị biến dạng, đảm bảo tính vững chắc của công trình, mà tiết kiệm được nhiều nguyên vật liệu. Tháp Eiffel được xây dựng cuối Thế kỉ XIX, trước khi tam giác Sierpinski xuất hiện khoảng 25 năm, nhưng hai công trình dựa trên những ý tưởng sáng tạo khá gần nhau.

4.- TỰ ĐỒNG DẠNG VÀ THỨ NGUYÊN PHÂN SỐ - ĐẶC TRƯNG PHỔ BIẾN CỦA NHIỀU FRACTAL.

Các hình ta đã xem xét như: Đường cong von Kock, Đường cong Minkowski, Tam giác Sierpinski, và nhiều hình khác sẽ xét sau này, là những hình mà Mandelbrot đã đặt tên là *FRACTAL*. Chúng rất khác lạ so với những hình đã biết trong Hình học Euclid (tam giác, đa giác, hình tròn, ...). Khác lạ vì fractal có cấu trúc nhìn bề ngoài rất phức tạp, dù xét ở bộ phận nhỏ đến đâu cũng vẫn có những chi tiết tinh vi. Thế nhưng fractal lại có thể được xác định bằng cách thực hiện lặp đi lặp lại một quy tắc sinh (một *thủ tục hồi quy*) khá đơn giản. Tuy nhiên fractal chỉ có thể vẽ bằng tay sau năm ba bước lặp đầu tiên, và nếu vẽ bằng máy tính thì cũng phải dừng sau mấy chục bước lặp, đủ để thấy rõ hình dáng của fractal.

Một đặc trưng phổ biến của nhiều fractal là có thể phân tích ra thành những bộ phận nhỏ tùy ý, mà mỗi bộ phận có cấu trúc y hệt toàn thể. Nói cách khác, mỗi bộ phận này là một bản sao thu nhỏ của toàn thể fractal. Mandelbrot gọi tính chất đó là *tính tự đồng dạng*. Chẳng hạn, với Đường cong von Kock (Hình 1) thì K_1 gồm bốn phần (bốn đoạn thẳng), mỗi phần đồng dạng với K_0 theo tỉ số đồng dạng $\frac{1}{3}$, K_2 gồm bốn phần, mỗi phần đồng dạng với K_1 theo tỉ số $\frac{1}{3}$, v.v.... Lặp lại quy tắc sinh vô hạn lần, ta được đường cong K gồm bốn phần, mỗi phần đồng dạng với K theo tỉ số $\frac{1}{3}$. Vì mỗi phần này là một bản sao thu nhỏ của K nên nó lại cũng gồm bốn phần, mỗi phần đồng dạng

với nó theo tỉ số $\frac{1}{3}$ tức là đồng dạng với K theo tỉ số $\frac{1}{9}$, v.v.... Rốt cục, với mọi n Đường cong von Kock gồm có 4^n bản sao của chính nó theo tỉ số thu nhỏ $\frac{1}{3^n}$.

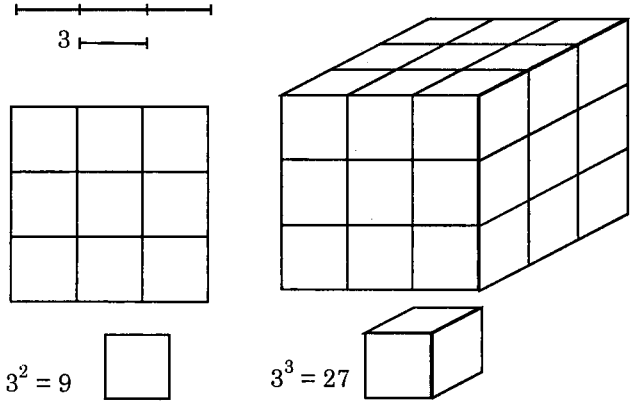
Tương tự, với bất kì n, Tam giác Sierpinski (Hình 8) gồm 3^n bản sao của chính nó theo tỉ số thu nhỏ $\frac{1}{3^n}$.

Từ tính tự đồng dạng của nhiều fractal người ta đã mở rộng khái niệm về thứ nguyên (số chiều) của các hình, để có thể vừa áp dụng được cho các hình trong Hình học Euclid quen thuộc, vừa áp dụng được cho fractal và nói lên một thông tin quan trọng về fractal.

Trong Hình học Euclid ta coi điểm là đối tượng không có "kích thước", không có chiều dài, chiều rộng lẫn chiều cao, *điểm có số chiều là* 0 (hay thứ nguyên 0). Đường thẳng chỉ có chiều dài, không có chiều rộng, không có chiều cao, *đường thẳng có số chiều là* 1 (thứ nguyên 1). *Mặt phẳng có số chiều là* 2 (thứ nguyên 2), vì chỉ có chiều dài và chiều rộng, không có chiều cao. Chúng ta đang sống *trong không gian* 3 *chiều*.

Thứ nguyên của một đối tượng hình học có thể hiểu một cách khác.

Xét các hình quen thuộc: đoạn thẳng, hình vuông, hình lập phương. Có thể chia mỗi hình này ra N phần để cho mỗi phần đồng dạng với hình ban đầu. Gọi tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{k}$ thì ta có $N = k$ đối với đoạn thẳng, $N = k^2$ đối với hình vuông và $N = k^3$ đối với hình lập phương. Hình 13 minh hoạ điều này.



Hình 13. Thứ nguyên đoạn thẳng, hình vuông và lập phương

Ta nói đoạn thẳng có thứ nguyên (số chiều) 1, hình vuông có thứ nguyên 2, hình lập phương có thứ nguyên 3. Như vậy thứ nguyên của mỗi hình đó là số mũ d trong hệ thức $N = k^d$ ứng với hình đó.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau.

Nếu có thể chia một hình H cho trước ra N phần, mỗi phần đồng dạng với H theo tỉ số $\frac{1}{k}$ mà

$$N = k^d$$

thì ta nói *H có thứ nguyên d.*

Ta xét Đường cong von Kock K (Hình 1). K có thể chia ra bốn phần ($N = 4$), mỗi phần đồng dạng với K theo tỉ số $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$ ($k = 3$). Ta có bảng sau.

Hình	N (số phần, với $k = 3$)	Thứ nguyên
Đoạn thẳng	$3 = 3^1$	1
Đường von Kock	$4 = 3^d$	$d = ?$
Hình vuông	$9 = 3^2$	2

Qua bảng trên, ta thấy d là một số giữa 1 và 2, phản ảnh sự kiện là Đường cong von Kock (có hai đầu mút, nhưng lại có chiều dài vô hạn) chiếm khoảng "rộng" hơn đoạn thẳng, nhưng

chưa bằng hình vuông.

Để tính d ta lấy logarit (theo cùng một cơ số, thường là cơ số 10) hai vế của đẳng thức $N = k^d$ và có

$$\log N = d \log k \text{ hay } d = \frac{\log N}{\log k}.$$

Đường cong von Kock có thứ nguyên bằng

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}262.$$

Để tính thứ nguyên của các fractal tự đồng dạng thường chỉ cần căn cứ vào quy tắc sinh (tập sinh) của nó.

Với Đường cong Minkowski, Hình 2 cho thấy tập sinh của nó gồm 8 đoạn thẳng ($N = 8$), mỗi đoạn thẳng đồng dạng với hình ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{4}$ ($k = 4$), do đó thứ nguyên của Đường cong Minkowski là

$$\frac{\log 8}{\log 4} = 1{,}5.$$

Tam giác Sierpinski (Hình 8) có thứ nguyên $d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}585...$, vì tập sinh gồm ba phần ($N = 3$), mỗi phần đồng dạng với tam giác ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{2}$ ($k = 2$).

Như vậy, hai đường cong von Kock và Minkowski cùng có chiều dài vô hạn nhưng thứ nguyên khác nhau, có "thang" đo khác nhau.

Tấm thảm Sierpinski vuông có thứ nguyên là $\frac{\log 8}{\log 3} = 1{,}8928...$, do tập sinh gồm tám hình vuông, mỗi hình vuông đồng dạng với hình vuông ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{3}$.

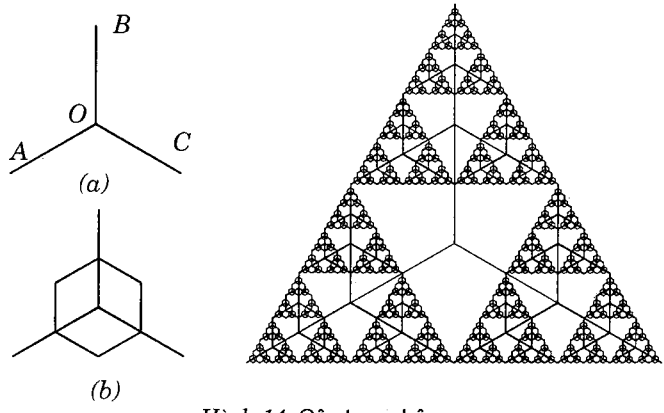
Theo quy tắc sinh của Bọt biển Menger, ta đã đục trong hình lập phương ban đầu 7 hình lập phương nhỏ, còn lại $27 - 7 = 20$ hình lập phương đồng dạng với hình lập phương ban

đầu theo tỉ số $\frac{1}{3}$, do đó bọt biển Menger có thứ nguyên $\frac{\log 20}{\log 3}$ = 2,7268....

Bạn đọc cũng có thể tự chứng minh thứ nguyên của fractal đệm ngũ giác I (Hình 10) bằng $\frac{\log 5}{\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$, của đệm ngũ giác II (Hình 11) bằng $\frac{\log 6}{\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Cây tam phân

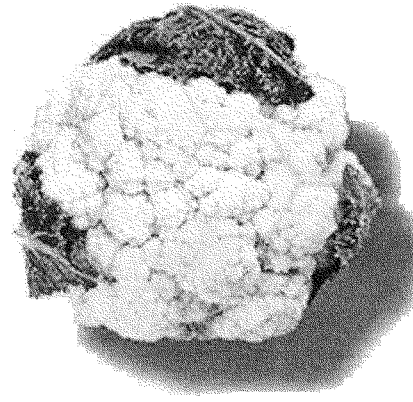
Hãy xem fractal được biểu diễn trên Hình 14, mà ta gọi là một fractal cây tam phân, có bóng dáng của tam giác Sierpinski.



Hình 14. Cây tam phân

Dễ thấy rằng fractal này được xây dựng từ hình ban đầu là một bộ ba đoạn thẳng (*OA, OB, OC*) bằng nhau, tạo thành những góc 120° (Hình 14(a)). Quy tắc sinh là từ các trung điểm

I, J và K của các đoạn thẳng ấy dựng thêm hai đoạn thẳng để được 3 bộ ba đoạn thẳng đồng dạng với bộ ba đoạn thẳng ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{2}$ (Hình 14(b)). Do đó thứ nguyên của fractal cây tam phân là $\frac{\log 3}{\log 2}$ = 1,585..., nghĩa là bằng thứ nguyên tam giác Sierpinski.

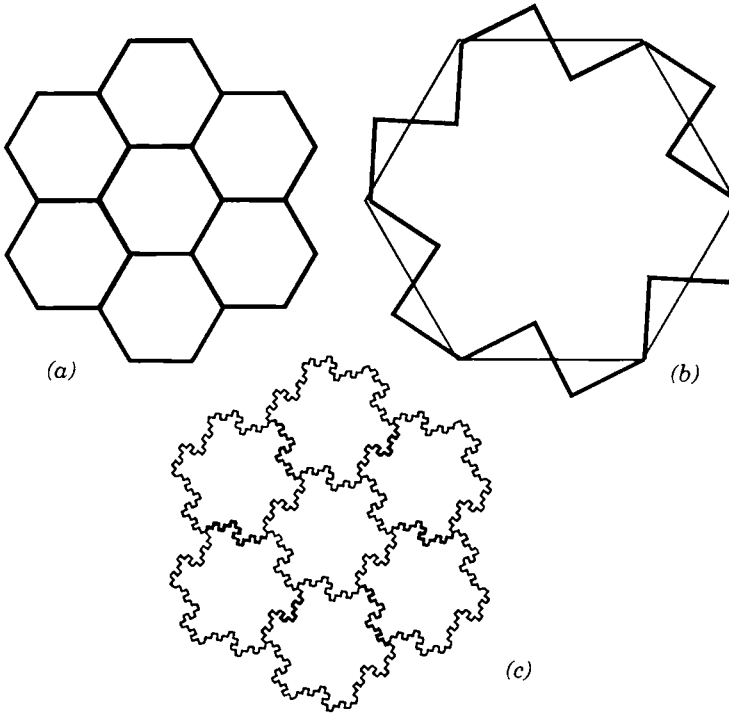


Các fractal tự đồng dạng là mô hình của nhiều đối tượng và hiện tượng trong thiên nhiên và đời sống. Thí dụ bông cải hoa (hay hoa lơ, sup-lơ) thường có từ 12 đến 14 cánh, mỗi cánh này tách ra lại có dạng gần như bông cải hoa ban đầu (với tỉ số đồng dạng xấp xỉ $\frac{1}{3}$), đến lượt chúng mỗi cánh lại có từ 12 đến 14 cánh đồng dạng như vậy, ... (đương nhiên quá trình lặp này kết thúc chỉ sau một số ít bước, hoa lơ có tính *gần như tự đồng dạng*, và có người gọi đó là một fractal sinh học). Thứ nguyên của hoa lơ (có 13 cánh) xấp xỉ bằng $\frac{\log 13}{\log 3}$ = 2,3347....

Tính tự đồng dạng và thứ nguyên phân số của nhiều fractal đưa đến nhiều kết quả trái với trực giác thông thường, trái với nhiều kết quả quen thuộc trong Hình học Euclid. Từ một hình tam giác đều, một hình vuông có chu vi và diện tích xác định, ta đã có thể xây dựng nên một Bông tuyết von Kock, một Hòn đảo Minkowski có chu vi dài vô hạn mà vẫn bao một diện tích hữu hạn. Sự kiện sau đây còn có vẻ phi lí, khác thường hơn.

Xét hình ban đầu là hình 18 cạnh tạo thành bởi bảy viên "gạch lát" hình lục giác đều như trong Hình 15(a). Ta biến đổi mỗi cạnh của các hình lục giác đều thành một fractal theo *quy*

tắc sinh như trên Hình 15(b): Thay cạnh (AB chẳng hạn) bằng một đường gấp khúc gồm ba đoạn bằng nhau ($AC = CD = DB$, I là trung điểm của AB và CD, với $ACD = CDB = 120°$). Kết quả là từ Hình 15(a) ta được Hình 15(c), trong đó bảy fractal "lục giác" nhỏ hợp lại thành một fractal "lục giác" lớn, đồng dạng với từng fractal "lục giác" nhỏ. Như vậy là từ một đa giác 18 cạnh không đồng dạng với các lục giác nhỏ hợp thành nó ta đã xây dựng được một hình tự đồng dạng.

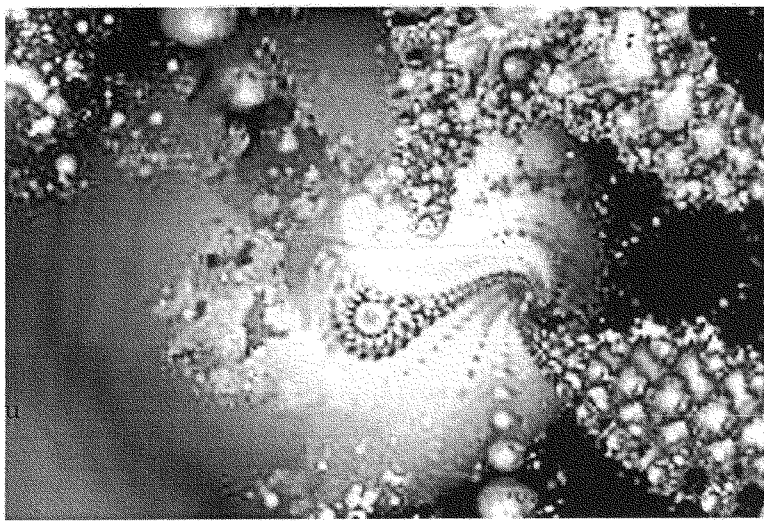


Hình 15. Chu vi gấp 3 diện tích gấp 7

Hình 15(c) cho thấy chu vi fractal lục giác lớn bằng 3 lần chu vi fractal lục giác nhỏ, thế nhưng diện tích của nó chỉ bằng 7 lần diện tích của fractal lục giác nhỏ, chứ không phải bằng $3^2 = 9$ lần như trong Hình học Euclid. Nghịch lí này cũng như nghịch lí về Bông tuyết von Kock, Hòn đảo Minkowski và nhiều nghịch lí fractal khác được giải thích thông qua khái niệm thứ nguyên.

Ở đây, ta thấy tập sinh (Hình 15(b)) gồm $N = 3$ đoạn thẳng bằng nhau, mỗi đoạn thẳng bằng $\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ đoạn thẳng ban đầu (suy ra từ hệ thức $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD\cos C$). Do đó thứ nguyên của các fractal lục giác bằng $\frac{\log N}{\log k} = \frac{\log 3}{\log \sqrt{7}} =$ 1,12915....

Khái niệm về thứ nguyên của các fractal cũng giúp giải thích nhiều nghịch lí khác sau này sẽ gặp.



5. ĐÁM BỤI CANTOR

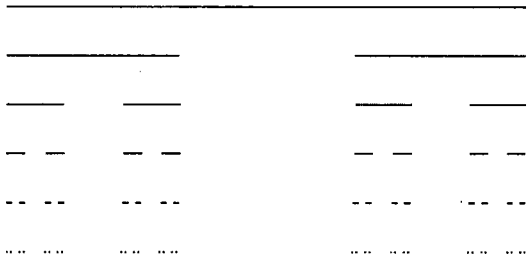
Có thể coi Sàng Sierpinski là hình tương tự trong mặt phẳng với *Tập hợp Cantor* (còn gọi là *Đám bụi Cantor*), do nhà toán học Đức George Cantor (1845-1919) xây dựng hơn 30 năm trước đó (1883).

Hình ban đầu C_0 là đoạn thẳng đơn vị [0; 1] (Hình 16).

Quy tắc sinh: Chia đoạn thẳng [0; 1] ra ba đoạn bằng nhau, rồi bỏ đoạn nhỏ ở chính giữa, được hình C_1.

Lặp lại quy tắc sinh đối với mọi đoạn thẳng của C_1, được C_2, ..., cứ thế tiếp tục đến vô tận.

Ta được một *tập hợp gồm toàn những hạt bụi*, có *tổng chiều dài bằng* 0, *không chứa bất cứ đoạn thẳng nào thuộc* [0; 1], dù nhỏ bao nhiêu, nhưng vẫn *gồm vô số không đếm được các điểm*, *có thể cho tương ứng 1-1 với toàn bộ đoạn thẳng* [0; 1].



Hình 16. Tập hợp Gantor

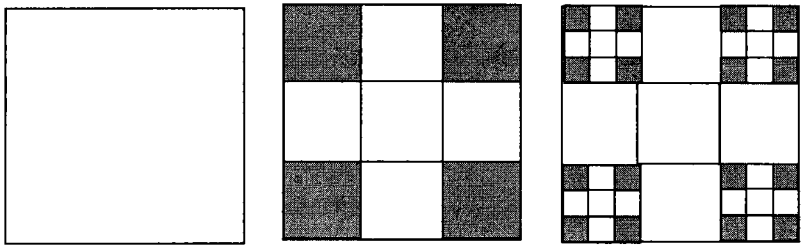
Tập Cantor có thể định nghĩa về mặt số học như là tập hợp tất cả các số được viết dưới dạng *phân số tam phân* $0,a_1a_2...a_n...$ (phân số trong hệ đếm tam phân) mà mỗi chữ số đều bằng 0 hoặc 2 (không có chữ số 1).

Dễ thấy rằng tập sinh của tập Cantor gồm 2 đoạn thẳng (N = 2), mỗi đoạn thẳng đồng dạng với hình ban đầu theo

www.facebook/otoanhoc2911

tỉ số $\frac{1}{3}$, (k = 3), do đó tập Cantor có thứ nguyên bằng $\frac{\log 2}{\log 3}$ = 0,6309....

Tập Cantor trong mặt phẳng được mô tả trên Hình 17.



Hình 17. Tập hợp Cantor phẳng

Hình ban đầu là hình vuông đơn vị.

Quy tắc sinh: Chia hình vuông ra thành chín hình vuông nhỏ bằng nhau, rồi xoá đi năm hình, chỉ để lại bốn hình vuông nhỏ ở các góc (Hình 17(b)).

Lặp lại quy tắc sinh đối với mỗi hình vuông còn lại (Hình 17(c)), cứ thế tiếp tục đến vô tận.

Tập sinh của tập Cantor trong mặt phẳng gồm bốn hình vuông nhỏ đồng dạng với hình vuông ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{3}$ cho nên thứ nguyên của tập Cantor trong mặt phẳng là $\frac{\log 4}{\log 3}$.

Có thể coi tập Cantor trong mặt phẳng là tập hợp tất cả các cặp số (x; y) với x và y được viết dưới dạng tam phân

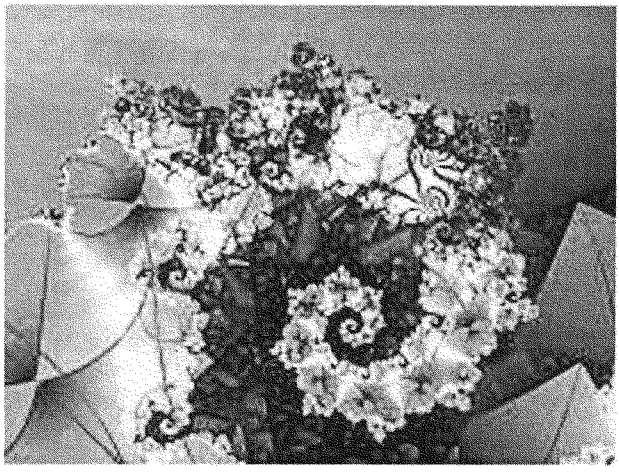
$$x = 0,a_1a_2...a_n... \quad y = 0,b_1b_2...b_n...$$

trong đó mỗi chữ số a_1, a_2, ..., a_n, ... và b_1, b_2, ..., b_n, ... đều bằng 0 hoặc 2 (không có chữ số 1).

Tập Cantor có ý nghĩa rất cơ bản đối với nhiều vấn đề quan trọng của toán học nói chung. Người ta chứng minh rằng mỗi fractal đều là ảnh liên tục của tập Cantor, nghĩa là đối với mỗi fractal đều tìm được một ánh xạ φ liên tục biến tập Cantor

thành fractal ấy. Theo nghĩa đó có thể nói tập Cantor là fractal "nguyên thuỷ", mà mọi fractal dù cấu trúc phức tạp đến đâu, cũng đều có thể xem là ảnh của nó qua một phép biến đổi liên tục. Một phát hiện quả thật bất ngờ về thế giới các hình xung quanh ta!

Mandelbrot đã nghiên cứu sự phân phối theo thời gian của tiếng ồn trong đường dây truyền tin và nhận thấy không có khoảng t nào mà ở đó liên tục có tiếng ồn; trong khoảng t, dù ngắn bao nhiêu, cũng có đoạn có tiếng ồn có đoạn không, hơn nữa tỉ lệ giữa đoạn không có tiếng ồn với đoạn có tiếng ồn luôn không đổi. Thành thử sự xuất hiện của tiếng ồn trong đường dây truyền tin là một đám bụi Cantor.

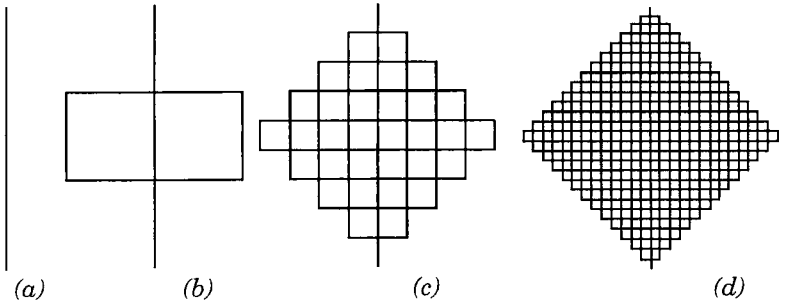


6. ĐƯỜNG CONG LẤP ĐẦY MỘT HÌNH VUÔNG

Năm 1890 nhà toán học Ý Peano (1858-1932) nghĩ ra một đường cong liên tục, đi qua mọi điểm của một hình vuông, nói cách khác "lấp đầy hình vuông". Cantor cũng đã từng nghĩ đến đường cong này. Nhưng khi công bố điều kì lạ này, không chỉ các nhà toán học, mà chính Cantor cũng ngỡ ngàng: "Tôi đã thấy nó nhưng tôi không tin được !"

Sau đây là một thủ tục hình học khá đơn giản để xây dựng đường cong Peano.

Xuất phát từ một đoạn thẳng AB (Hình 18(a)).



Hình 18. Đường cong Peano

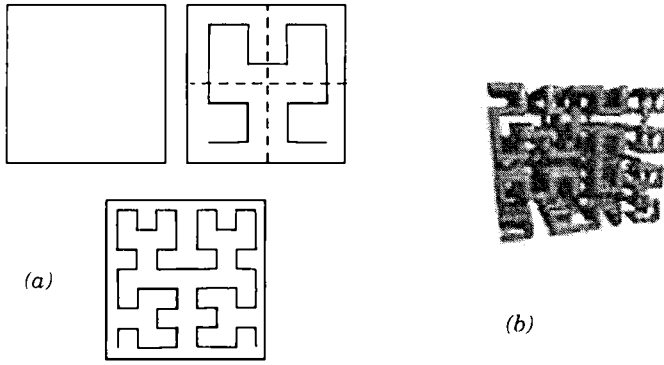
BƯỚC 1 (*quy tắc sinh*). Thay đoạn thẳng ban đầu bằng chín đoạn thẳng như Hình 18(b) (chia AB ra ba đoạn bằng nhau bởi hai điểm C và D và dựng trên đoạn CD hai hình vuông về hai phía của AB). Có thể đi từ A đến B qua tất cả chín đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng chỉ một lần.

BƯỚC 2. Lặp lại quy tắc sinh đối với từng đoạn thẳng của Hình 18(b), ta được Hình 18(c). Sau ba bước, ta có Hình 18(d).

Lặp lại quy tắc sinh vô hạn lần, ta được một đường cong. Có thể chứng minh rằng đường cong này đi qua mọi điểm của hình vuông có đường chéo AB, đó là *Đường cong Peano*.

Tập sinh của đường cong này gồm chín đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng đồng dạng với đoạn thẳng ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{3}$, vì vậy đường cong Peano có thứ nguyên bằng $\frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log 3^2}{\log 3} = 2$, tức là bằng thứ nguyên hình vuông, đúng như chờ đợi.

Có một thủ tục khác để xây dựng đường cong Peano, theo các bước như trong Hình 19, do nhà toán học Đức Hilbert (1862-1942) đưa ra năm 1891.



Hình 19. (a) Đường cong Peano - Hilbert
(b) Đường cong Peano - Hilbert 3D

Chú ý rằng quy tắc sinh ở đây có khác với quy tắc sinh các fractal ta đã xét trước đây. Chia hình vuông ra bốn hình vuông nhỏ, đặt hình đồng dạng với hình ban đầu theo tỉ số $\frac{1}{2}$ ở phần tư phía trên bên trái, rồi dùng phép quay đưa hình này xuống phần t phía dưới bên trái, sau đó dùng phép đối xứng trục để có hình ở phần tư bên phải. Phương pháp này có ưu điểm là mở rộng được cho không gian nhiều chiều, để có ứng dụng vào lí thuyết thông tin, chẳng hạn trong việc xây dựng mã Gray.

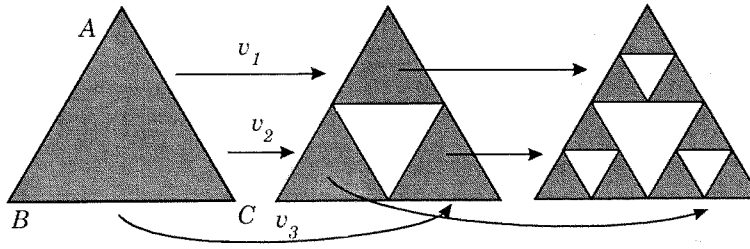
7. MÃ DI TRUYỀN HÌNH HỌC

Ở trên đã thấy rằng nhiều fractal có thể xây dựng bằng một quy tắc sinh. Một phương pháp tổng quát hơn để xây dựng fractal là dùng một *sơ đồ hàm lặp*, hay còn gọi là một *IFS* (viết tắt các từ tiếng Anh Iterated Function Scheme), như sau.

Chẳng hạn, muốn xây dựng Tam giác Sierpinski ta xuất phát từ tam giác đều T_0 có ba đỉnh A, B, C và 3 phép vị tự v_1, v_2, v_3 theo tỉ số $\frac{1}{2}$ và tâm lần lượt là A, B và C. Để mô tả ngắn gọn và chính xác, khi có một hình S thì ta ký hiệu $v_1(S)$, $v_2(S)$, $v_3(S)$ là các hình vị tự với S trong các phép vị tự v_1, v_2, v_3 tương ứng và $v(S)$ là hình hợp thành bởi cả ba hình $v_1(S)$, $v_2(S)$ và $v_3(S)$, tức là

$$v(S)= v_1(S) \cup v_2(S) \cup v_3(S).$$

Bây giờ ta tiến hành các bước lặp như sau (Hình 20).



Hình 20. IPS của tam giác Sierpinski

BƯỚC LẶP 1. Xây dựng $T_1 = v(T_0)$, tức T_1 là hình hợp thành bởi các tam giác $v_1(T_0)$, $v_2(T_0)$ và $v_3(T_0)$ vị tự với T_0 theo tỉ số $\frac{1}{2}$ và các tâm A, B và C.

BƯỚC LẶP 2. Xây dựng $T_2 = v(T_1)$ tức T_2 là hình hợp thành bởi các hình $v_1(T_1)$, $v_2(T_1)$ và $v_3(T_1)$ vị tự với T_1 theo tỉ số $\frac{1}{2}$ và các tâm A, B và C. Vì $v(T_1) = v(v(T_0))$ nên có thể viết $v(T_1) = v^2(T_0)$. Vậy $T_2 = v^2(T_0)$.

Tiếp theo, Bước lặp 3 xây dựng $T_3 = v(T_2) = v^2(T_0)$, Bước lặp 4 xây dựng $T_4 = v(T_2) = v^4(T_0)$, ...

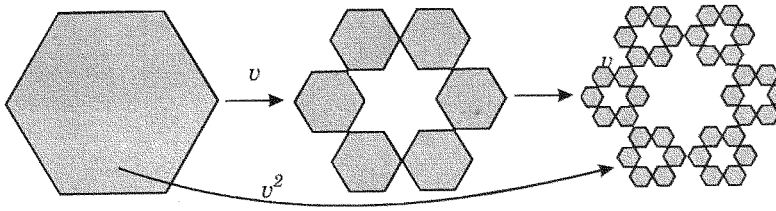
Nói chung bước lặp n = 1, 2, 3, ... xây dựng $T_n = v^n(T_0)$. Cứ mỗi bước lặp thì mỗi tam giác con ở bước ấy được chia ra thành ba tam giác nhỏ hơn theo tỉ lệ đồng dạng $\frac{1}{2}$, cho nên T_n gồm 3^n tam giác con, đồng dạng với T_0 theo tỉ số $\frac{1}{2^n}$. Khi $n \to +\infty$ thì T_n sẽ dần tới giới hạn là *Tam giác Sierpinski.*

Như vậy, Tam giác Sierpinski có thể hình thành bằng cách lặp đi lặp lại vô hạn lần phép biến đổi v xác định bởi ba phép vị tự v_1, v_2 và v_3. Tập ba phép vị tự v_1, v_2 và v_3 này được gọi là *sơ đồ hàm lặp* (IFS) của fractal. Có thể ví IFS như mã di truyền hình học, chứa thông tin cô đọng về cách hình thành fractal từ tập ban đầu T_0. Bạn đọc có thể nhận ra ngay rằng

$$v(T_0) = v_1(T_0) \cup v_2(T_0) \cup v_3(T_0)$$

chính là tập sinh, và phép biến đổi v chính là quy tắc sinh trong cách xây dựng trước đây.

Các fractal khác như tấm đệm ngũ giác (Hình 10, 11), đệm lục giác, v.v... cũng có thể xây dựng theo một sơ đồ hàm lặp tương tự. Chẳng hạn sơ đồ hàm lặp của đệm lục giác gồm 6 phép vị tự, theo tỉ số $\frac{1}{3}$ và tâm ở các đỉnh của lục giác (Hình 21).



Hình 21. IFS của đệm lục giác

Để khái quát phương pháp sơ đồ hàm lặp, ta cần định nghĩa một vài khái niệm. Cho trước một tập S mà các phần tử có thể bất kì, một ánh xạ (hay phép biến đổi) v: $S \to S$ là một quy tắc cho ứng với mỗi phần tử M của S một phần tử $v(M)$ cũng của S (gọi là ảnh của M qua ánh xạ v). Khi S là một tập điểm trong mặt phẳng, ánh xạ v gọi là một *phép đồng dạng* nếu với mọi cặp điểm bất kì M, N của S thì độ dài đoạn thẳng nối $v(M)$ và $v(N)$ bao giờ cũng bằng độ dài đoạn thẳng (của MN) nhân với một hằng số. Tùy theo hằng số này nhỏ hơn hay lớn hơn 1 ta có một phép *thu nhỏ*, hay *phóng to*. Dĩ nhiên phép vị tự là trường hợp riêng của phép đồng dạng.

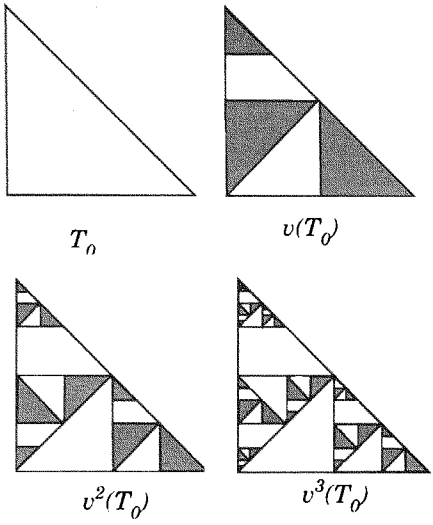
Bây giờ giả sử ta có một hình T_0 (có thể là hình chữ nhật, hình đa giác, hình tròn, hình elip, v.v...) và m phép thu nhỏ v_1, ..., v_m. Lúc ấy ta có thể lập các hình $v_1(T_0)$, $v_2(T_0)$, ..., $v_m(T_0)$ (ảnh của T_0 qua các phép thu nhỏ v_1, v_2, ..., v_m. Gọi T_1 là hình gồm tất cả các ảnh này và v là phép biến đổi hình T_0 thành T_1. Như vậy

$$T_1 = v(T_0) \text{ với } v(T_0) = v_1(T_0) \cup v_2(T_0) \cup ... \cup v_m(T_0).$$

Sau đó $T_2 = v(T_1) = v(v(T_0)) = v^2(T_0)$, và nói chung $T_n = v^n(T_0)$. Chẳng hạn, trong Hình 22, T_0 là một tam giác vuông, v_1, v_2 và v_3 biến T_0 thành ba tam giác vuông có tô đậm $T_1 = v(T_0)$, $T_2 = v^2(T_0)$ và $T_3 = v^3(T_0)$ như trong hình vẽ.

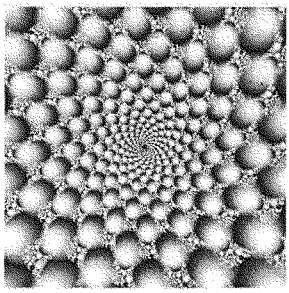
Hiển nhiên

$$T_0 \supset T_1 \supset ... \supset T_n \supset T_{n+1} \supset ...$$



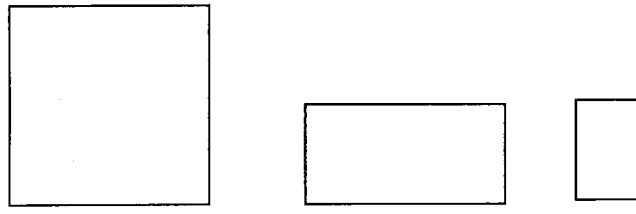
Hình 22. Sơ đồ hàm lặp v

Gọi E là giao của tất cả các T_n, $n = 1, 2, \ldots$ ($E = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$). Nếu ta lại áp dụng phép biến đổi v cho tập E thì ta có $v(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} v(T_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{n+1} = E$, nghĩa là E không thay đổi qua phép biến đổi v, cho nên E được gọi là *tập bất biến* của phép biến đổi v (hay tập bất biến của họ phép biến đổi $v_1, \ldots, v_m$.) Khi tập bất biến này là fractal thì ta cũng nói nó được xác định bởi sơ đồ hàm lặp $v_1, \ldots, v_m$.



8. FRACTAL TỰ AFIN

Một lớp fractal rộng hơn lớp các fractal tự đồng dạng là lớp các *fractal tự afin*. Phép biến đổi afin (mà phép biến đổi đồng dạng chỉ là một trường hợp riêng) là phép biến đổi trong đó ba điểm thẳng hàng bao giờ cũng được biến thành ba điểm thẳng hàng. Như vậy, phép biến đổi afin biến đường thẳng (đoạn thẳng) thành đường thẳng (đoạn thẳng), biến hai đường cắt nhau (song song) thành hai đường cắt nhau (song song). Phép biến đổi afin co dãn một hình theo các phương khác nhau với những tỉ số nói chung là khác nhau (nếu các tỉ số này đều bằng nhau theo mọi phương thì ta có phép biến đổi đồng dạng). Thí dụ, phép biến đổi afin có thể biến hình tròn thành hình elip (co dãn hình tròn theo hai phương vuông góc với tỉ số khác nhau); có thể biến đổi hình chữ nhật thành hình bình hành (biến đổi hai cạnh bên thành hai cạnh song song nhưng không vuông góc với cạnh đáy). Trong Hình 23 từ hình vuông (a) ta có hình chữ nhật (c) qua hai phép biến đổi afin: co (a) theo phương thẳng đứng với tỉ số $\frac{1}{2}$ để có hình chữ nhật (b), sau đó co (b) theo phương nằm ngang với tỉ số $\frac{1}{3}$ để có hình chữ nhật (c). Nếu trong một phép biến đổi afin mà tỉ số co dãn theo mọi phương đều không quá một số $k < 1$, thì ta cũng nói nó là một *phép co*.



Hình 23. Biến đổi afin

Ở trên khi định nghĩa IFS (sơ đồ hàm lặp) ta giả thiết các

phép biến đổi v_1, v_2, ..., v_m là những phép thu nhỏ (tức là những phép đồng dạng với tỉ số nhỏ hơn 1). Với giả thiết ấy thì tập bất biến là một hình tự đồng dạng. Bây giờ ta chỉ giả thiết các phép biến đổi v_1, v_2, ..., v_m là những phép co từ một tập ban đầu T_0 vào T_0. Khi ấy ta cũng định nghĩa v là phép biến đổi biến mỗi tập $S \subset T_0$ thành tập

$$v(S) = v_1(S) \cup v_2(S) \cup ... \cup v_m(S) \subset T_0,$$

và xây dựng các tập $v(S)$, $v^2(S) = v(v(S))$, ... Vì

$$T_0 \supset v_1(T_0) \supset v_2(T_0) \supset ... \supset v^n(S) \supset ...,$$

nên với tập $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} v_n(T_0)$ ta cũng có $E = v(E)$, cho nên E được gọi là *tập bất biến* của họ phép co v_1, v_2, ..., v_m.

Nếu các phép co v_1, v_2, ..., v_m là biến đổi afin thì E được gọi là một tập tự afin. Vậy *fractal tự afin* là những fractal mà là tập bất biến của một họ phép biến đổi afin co. Đương nhiên trong trường hợp riêng các v_1, v_2, ..., v_m là những phép thu nhỏ (đồng dạng co) thì tập bất biến là fractal tự đồng dạng.

Thí dụ 1. Cầu thang Cantor

Fractal này là tập bất biến của ba phép biến đổi afin từ một hình vuông vào chính nó.

Hình ban đầu T_0 là một hình vuông với đường chéo AC. (Hình 24(a)).

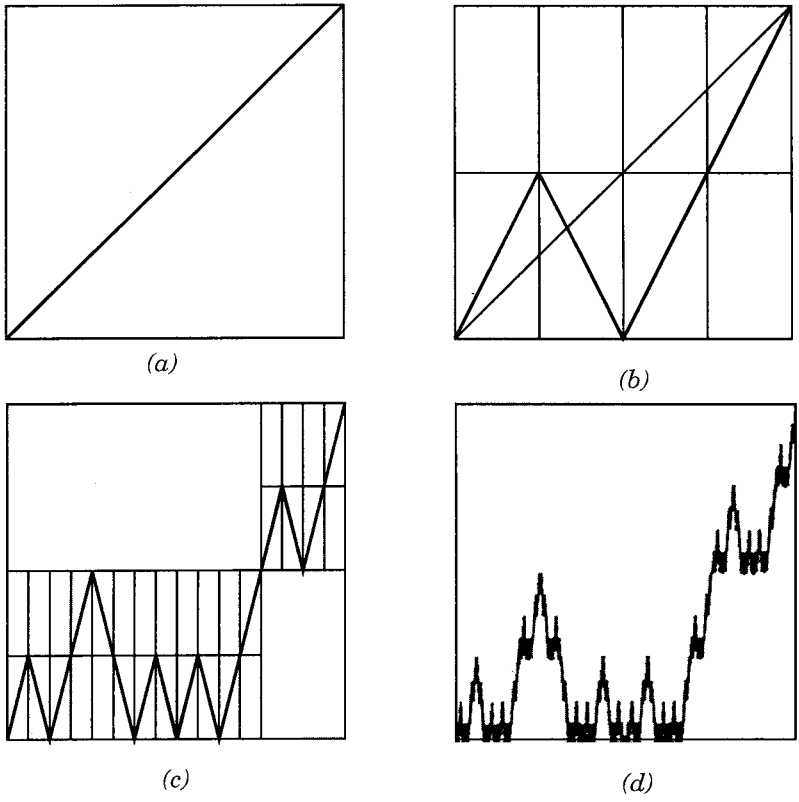
Các biến đổi afin: Chia đoạn thẳng nối các trung điểm của hai cạnh thẳng đứng của hình vuông ra ba đoạn bằng nhau bởi hai điểm I và J (Hình 24(b)). Xác định 3 phép biến đổi afin v_1, v_2 và v_3:

v_1 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo AI;

v_2 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo IJ; (suy

biến thành đoạn thẳng IJ)

v_3 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo JC.



Hình 25. Hình tự afin

Như vậy $v(T_0) = v_1(T_0) \cup v_2(T_0) \cup v_3(T_0)$ là hình mô tả ở Hình 24(b).

Tập $v^2(T_0)$ được mô tả trên Hình 24(c).

Tập bất biến của bộ ba phép biến đổi v_1, v_2 và v_3 (Hình 24(d)) là một fractal có tên là *Cầu thang Cantor*.

Do tính chất kì lạ của nó Cầu thang Cantor cũng được gọi là "*Cầu thang ma quái*". Nó có vô số bậc thang rộng hẹp khác

nhau. Có bậc rất rộng, nhưng có bậc từ rất hẹp đến vô cùng hẹp. Cụ thể có một bậc rộng $\frac{1}{3}$, có 2 bậc rộng $\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$, có $2^2 = 4$ bậc rộng $\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$, có $2^3 = 8$ bậc rộng $\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$, v.v.... Dễ thấy chiều rộng các bậc thang tương ứng các khoảng cách giữa các điểm trong đám bụi Cantor. Về mặt toán học nếu coi trục nằm ngang là trục x, trục thẳng đứng là trục y thì cầu thang Cantor là đồ thị biểu diễn một hàm $y = \Theta(x)$ gọi là *hàm Cantor*. Hàm này liên tục và biến đám bụi Cantor thành cả đoạn thẳng, thực hiện một phép biến đổi liên tục biến một tập hoàn toàn gián đoạn là đám bụi Cantor thành một đoạn thẳng.

Cầu thang Cantor là một thí dụ về fractal không có tính tự đồng dạng mà có tính tự afin. Trong trường hợp này tính tự afin thể hiện ở chỗ một bộ phận của hình sẽ trùng với hình ấy qua hai phép biến đổi afin, một phép dãn theo phương nằm ngang và một phép dãn theo phương thẳng đứng với những tỉ số thích hợp. Chẳng hạn lấy một bộ phận của T_2 (Hình 24(c)) là đường gấp khúc nét đậm gồm ba đoạn thẳng nối A với I, dãn ra theo phương nằm ngang với tỉ số $\frac{3}{1}$, sau đó dãn ra theo phương thẳng đứng với tỉ số $\frac{2}{1}$, ta sẽ được T_1 (Hình 24(b)).

Thí dụ 2. Đường cong tự afin

Hình ban đầu T_0: một hình vuông với đường chéo AC (Hình 25(a)).

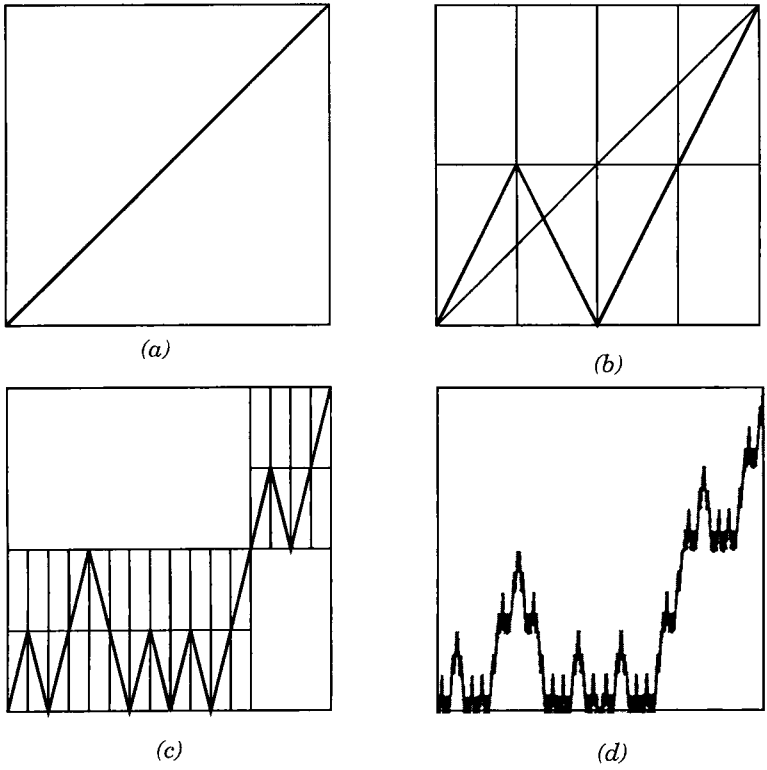
Các biến đổi afin: Kẻ ba đường song song với cạnh thẳng đứng và một đường song song với cạnh nằm ngang để chia hình vuông ra 8 chữ nhật bằng nhau. Xác định bốn phép biến đổi afin v_1, v_2, v_3 và v_4:

v_1 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo AI;

v_2 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo IJ;

v_3 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo JK;

v_4 biến T_0 thành hình chữ nhật với đường chéo KC.

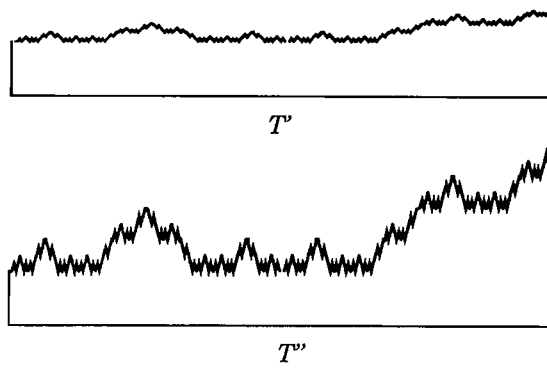


Hình 25. Hình tự afin

Như vậy $v(T_0) = v_1(T_0) \cup v_2(T_0) \cup v_3(T_0) \cup v_4(T_0)$. Tập $T_1 = v(T_0)$ được mô tả ở Hình 25(b) và $T_2 = v^2(T_0)$ ở Hình 25(c).

Tập $T_4 = v^4(T_0)$ mô tả ở Hình 25(d) đã cho hình ảnh gần đúng của fractal T_n khi $n \to +\infty$ (ta gọi T_n là *tiền fractal*). Fractal này là tập bất biến của bốn phép biến đổi afin v_1, v_2, v_3 và v_4 kể trên.

Nếu bây giờ ta co fractal T_n khi $n \to +\infty$ theo phương thẳng đứng với tỉ số $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{16}$ thì ta được các fractal tương ứng T_n' khi $n \to +\infty$ và T_n'' khi $n \to +\infty$ là hình ảnh gần đúng một bờ biển hoặc viền một rặng núi in lên nền trời (Hình 26).



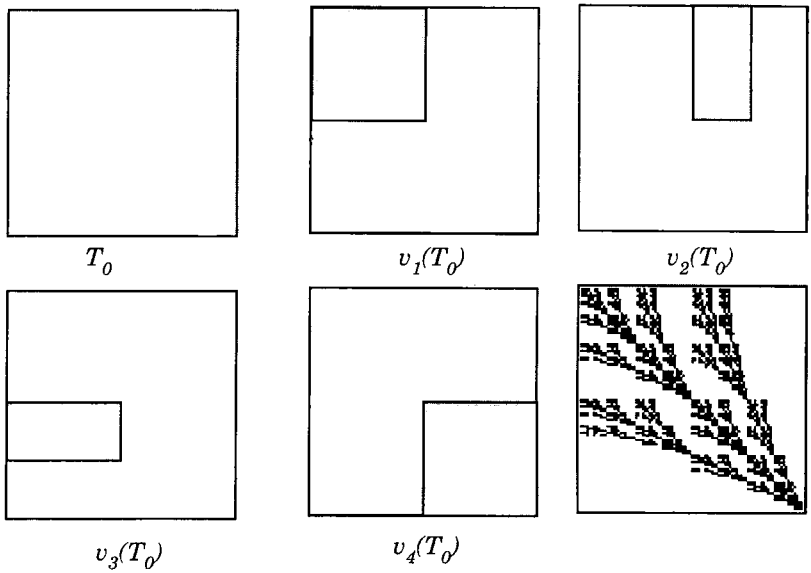
Hình 26. T'. Bờ biển T''. Dãy núi

Các fractal tự afin giúp mô tả nhiều hiện tượng xung quanh. Chẳng hạn, các mép mảnh vỡ của các vật dụng (đĩa, lọ,...), các mép mảnh gãy của tấm gỗ rất mỏng, thường có hình dáng gần giống những fractal tự afin. Người ta đã áp dụng Hình học fractal để kiểm tra độ nhẵn của một số dụng cụ chính xác, và những lọ ... nước hoa. Đã có những công trình nghiên cứu phân tích thứ nguyên fractal của đường viền các tế bào vùng u để cung cấp thêm thông tin làm cơ sở chẩn đoán chính xác một số bệnh ung thư.

Mặt khác, dựa vào phương pháp IFS nhiều khi chỉ cần một số ít phép co cũng đủ xác định một đối tượng có cấu trúc phức tạp. Chẳng hạn, cành cỏ ở Hình 27 (trang bên) có thể vẽ bằng máy tính theo một IFS gồm bốn phép biến đổi afin v_1, v_2, v_3 và v_4 như mô tả trong hình.

Cành dương xỉ đẹp hơn ở Hình 28 (trang 46) cũng được vẽ bằng máy tính theo một IFS gồm sáu phép biến đổi afin. Do đó, muốn lưu giữ hoặc truyền đi một hình ảnh chỉ cần lưu giữ hoặc

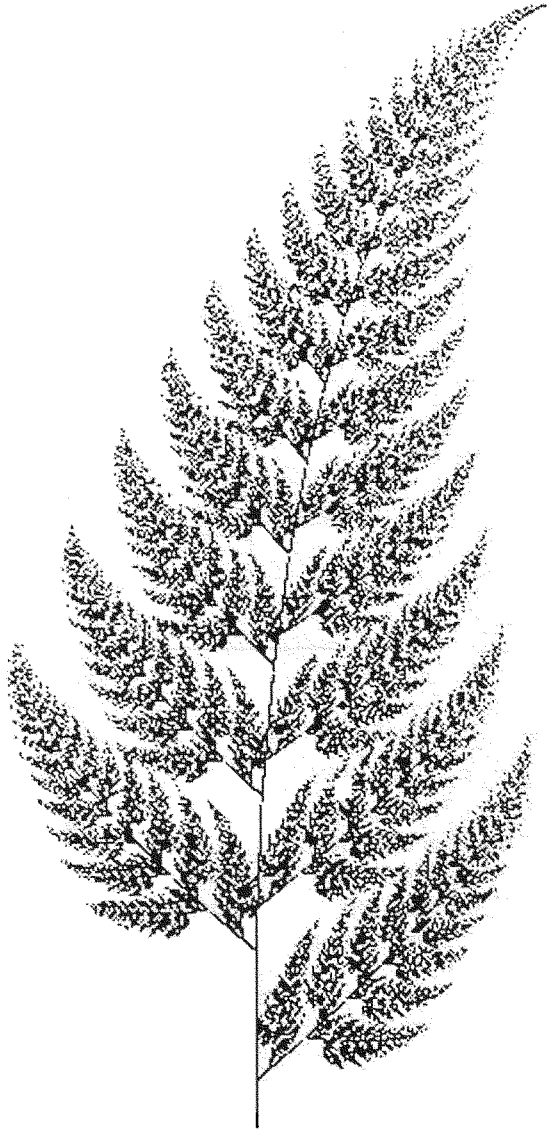
truyền đi IFS của nó, tức là các phép co mà nó là bất biến.



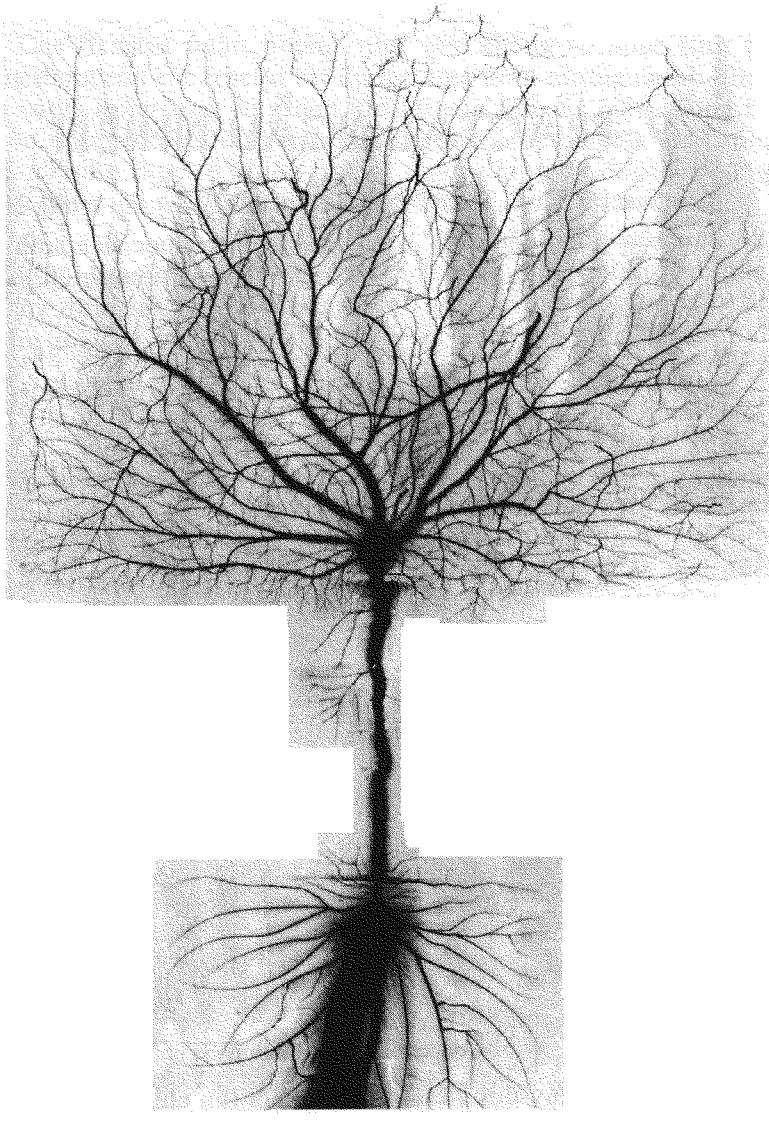
Hình 27. Cành cỏ (bất biến của bốn phép biến đổi afin)

Phần lớn các hình thường gặp đều có thể xấp xỉ với độ chính xác tuỳ ý bởi một tập tự đồng dạng hay tự afin, để suy ra được gần đúng IFS của nó. Vì số phép biến đổi thường không nhiều và các phép biến đổi có thể mô tả ngắn gọn nên đó là một cách mã hoá hình ảnh với một lượng thông tin tiết kiệm. Nhờ đó fractal đã được ứng dụng có hiệu quả trong kĩ thuật nén dữ liệu và truyền ảnh.

www.facebook/otoanhoc2911



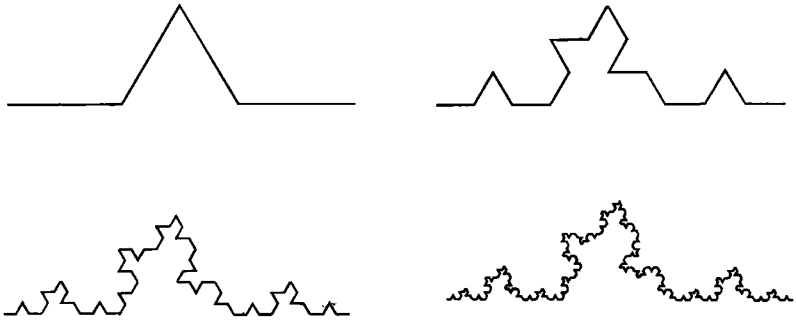
Hình 28. Cành dương xỉ (bất biến của bốn phép biến đổi afin)



9. FRACTAL NGẪU NHIÊN

Các fractal T' và T'' mà tiền fractal là $T_n^{'}$ và $T_n^{''}$ trong Hình 26 vẫn còn quá "đều đặn", chưa phản ảnh được hết tính "gồ ghề" của nhiều hình ảnh và hiện tượng trong thiên nhiên. Lí do là vì chúng được xây dựng theo cùng một quy tắc sinh vô hạn lần. Đó là những fractal *tất định*, không có yếu tố ngẫu nhiên xen vào.

Nhiều thủ tục xây dựng fractal có thể ngẫu nhiên hoá. Chẳng hạn trong cách xây dựng đường von Kock, mỗi lần thay đoạn giữa của một khoảng bằng hai cạnh của một tam giác đều, ta có thể gieo một đồng tiền để tuỳ theo sấp hay ngửa mà quyết định đặt hai cạnh đó ở phía trên hay phía dưới đoạn cần thay. Sau một số ít bước ta được một đường cong khác lạ, nhưng vẫn còn giữ được một số dáng điệu cơ bản của đường cong von Kock (Hình 29).



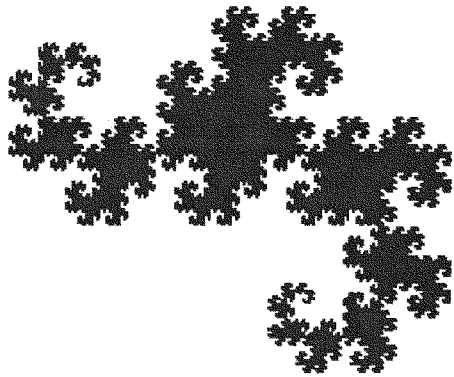
Hình 29. Xây dựng đường von Kock ngẫu nhiên

Trong cách xây dựng tập Cantor, mỗi lần chia ba một đoạn ta có thể không nhất thiết bỏ đoạn giữa, mà gieo một súc sắc để quyết định bỏ đoạn nào. Cũng có thể chọn ngẫu nhiên độ dài của các đoạn ở mỗi bước, để đến bước thứ k thì có 2^k khoảng với những độ dài khác nhau, do đó nhận được một fractal rất khác

tập Cantor.

Các "fractal ngẫu nhiên" như vậy không có được tính tự đồng dạng của các fractal tất định tương ứng, nhưng chính hình thù có vẻ lung tung đó nhiều khi lại gần gũi các hiện tượng tự nhiên như bờ biển, đường viền đám mây, các bề mặt địa hình, v.v.... Trong thực tế nhiều fractal ngẫu nhiên đã được sử dụng để vẽ bằng máy tính những phong cảnh lạ lẫm đầy ấn tượng.

Phần lớn các fractal ta đã xét là giới hạn T của một dãy tập T_n, mỗi tập này là do biến đổi tập ở bước trước để làm cho cấu trúc càng tinh vi hơn. Một fractal ngẫu nhiên thường thể hiện tính ngẫu nhiên ở ngay trong các phép biến đổi từ T_{n-1} sang T_n. Bằng những biến đổi ngẫu nhiên thích hợp có thể thu xếp để fractal có tính *tự đồng dạng thống kê*, nghĩa là những bộ phận nhỏ khi phóng đại lên có cùng một phân phối thống kê như toàn thể, thay vì giống y hệt toàn thể như trong các tập tự đồng dạng không ngẫu nhiên.



10. TẬP MANDELBROT

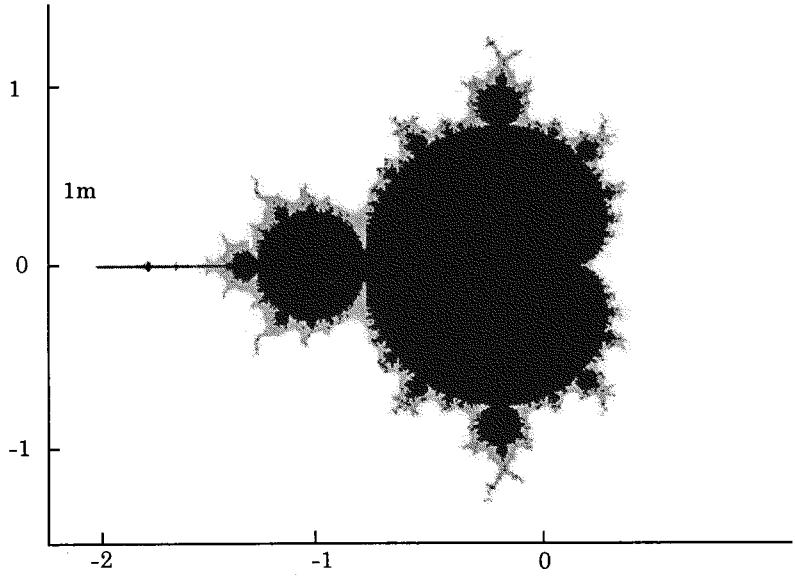
Sẽ là thiếu sót lớn nếu kết thúc tập sách giới thiệu này mà không nhắc tới fractal Mandelbrot nổi tiếng. Đây là một fractal tiêu biểu mà muốn hiểu đầy đủ cần có những kiến thức toán học vượt xa trình độ trung học. Vì vậy ở đây chỉ có thể nói qua cách xây dựng và nêu vài tính chất lí thú.

Hãy xem phương trình $z_{n+1} = z_n^2 + c$ trong đó z_n, z_{n+1} và c đều là những số phức. Khi gán cho z_0 giá trị 0, tức là đặt $z_0 = 0$ thì từ phương trình này suy ra $z_1 = c$, $z_2 = c^2 + c$, $z_3 = \left(c^2 + c\right)^2 + c$, v.v....Mỗi số phức được biểu diễn bằng một điểm $(x; y)$ trong mặt phẳng, với x là phần thực và y là phần ảo của nó. Câu hỏi đặt ra là: với giá trị nào của c thì dãy số phức vừa nói : c, $c^2 + c$, $\left(c^2 + c\right)^2 + c$, ... tức là dãy các điểm tương ứng đi xa ra vô hạn trong mặt phẳng? với những giá trị nào của c thì dãy đó không đi xa vô hạn mà bị chặn, nghĩa là chỉ quanh quẩn trong một hình tròn nào đó tâm ở gốc O và bán kính hữu hạn?

Tập các điểm c trong mặt phẳng mà dãy lặp tương ứng c, $c^2 + c$, $\left(c^2 + c\right)^2 + c$, ..., bị chặn làm thành một fractal gọi là *tập Mandelbrot*, (hay tập M cho gọn), vì do nhà toán học này phát hiện và nghiên cứu đầu tiên (Hình 30).

Tập M gồm có một hình quả tim lớn, với nhiều "con bọ" lớn nhỏ gắn xung quanh, mỗi "con bọ" này đến lượt nó lại có gắn những "con bọ" nhỏ hơn, v.v..., cứ thế mãi theo một cách lặp lại gần giống nhau, nhưng cỡ nhỏ dần đến vô cùng. Nếu phóng đủ to nhiều vùng khác của mặt phẳng thì lại cũng thấy trong các vùng này có những hình tim có gắn những con bọ nhỏ xung quanh tương tự như thế nhưng cỡ cực nhỏ. Ngoài ra, mỗi con bọ còn có nhiều râu và nếu phóng rất lớn các râu này thì còn có thể

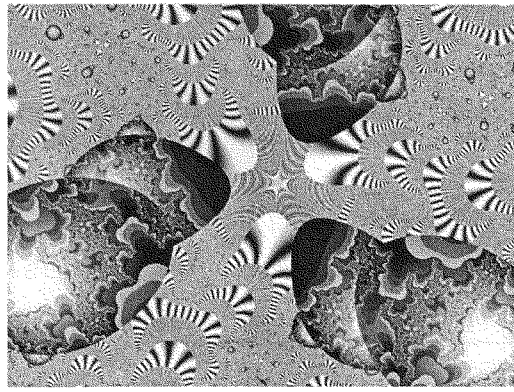
nhìn thấy nhiều hình thù lạ lẫm khác, cỡ rất nhỏ gắn dọc theo các râu. Tóm lại tập M có cấu trúc cực kì tinh vi, nhiều cấp nhiều tầng lớn nhỏ lặp lại gần giống nhau cho đến cỡ nhỏ vô cùng. Chỉ nguyên cái cấu trúc lạ lùng đó cũng đủ là đề tài rất hấp dẫn cho các bộ óc tò mò toán học.



Hình 30. Tập Mandelbrot

11. BENOIT MANDELBROT: NGƯỜI KHAI SINH HÌNH HỌC FRACTAL

Các fractal giúp mô tả rất nhiều sự vật và hiện tượng xung quanh ta. Đường cong von Kock là hình ảnh của nhiều bờ biển gồ ghề; bụi Cantor mô tả sự phân bố theo thời gian của các lỗi trong các đường truyền tin; mép mảnh vỡ của đĩa sứ, lọ sứ cũng thường có hình dáng fractal, v.v... Có những fractal trong mặt phẳng có chu vi dài vô hạn nhưng bao một diện tích hữu hạn; và những fractal trong không gian có diện tích bề mặt vô hạn nhưng bao một thể tích hữu hạn. Những fractal đó giúp ta hiểu được nguyên lí tiết kiệm và hiệu quả của thiên nhiên thể hiện ở những cấu trúc tinh vi như hệ thống mạch máu, hệ thống các phế nang trong cơ thể người tuy chỉ chiếm một thể tích khiêm tốn mà có diện tích trao đổi rất lớn.

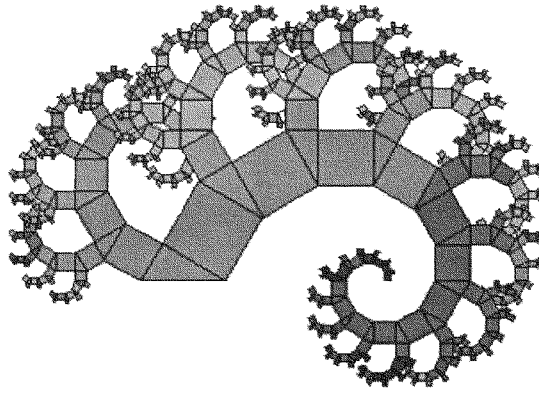


Nhiều fractal tuy hình dáng trông hết sức phức tạp nhưng cấu trúc phức tạp ấy lại chỉ là kết quả một quá trình phát triển đi từ một hình dáng ban đầu khá đơn giản, theo những quy tắc của một IFS giống như một mã di truyền chi phối cấu trúc của nó. Như vậy trong thiên nhiên cũng như trong đời sống, sự phức tạp, sự rắc rối, sự hỗn độn có thể phát sinh từ những sự vận động lặp đi lặp lại của một cơ chế vốn không có gì rắc rối,

phức tạp. Với ý nghĩa ấy Hình học fractal đã đưa lại cho khoa học hiện đại một cách nhìn mới, một quan niệm mới về sự phát triển của thế giới xung quanh ta.

Hình học fractal là một lí thuyết toán học hiện đại, mới ra đời chỉ cách đây mấy chục năm. Nhưng cũng như đối với hầu hết các ngành khoa học khác, nhiều khải niệm, nhiều kết quả và ý tưởng lớn của nó cũng đã tiềm ẩn trong những nghiên cứu từ trước đó khá lâu.

Những đường cong kì lạ như Đường cong von Kock, Đường cong Peano, những tập hợp kì lạ như Tập hợp Cantor, Tấm đệm Sierpinski, v.v..., đều đã xuất hiện từ cuối Thế kỉ XIX, đầu Thế kỉ XX. Nhưng sau một thời gây xôn xao và hoang mang trong giới khoa học, hầu hết những tập kì lạ này đã chìm dần trong lãng quên. Phải đợi đến những phát hiện bất ngờ có tính đột phá của Benoit Mandelbrot, một nhà toán học Pháp gốc Ba Lan lúc bấy giờ còn rất trẻ, thì lí thuyết toán học chặt chẽ về fractal mới thành hình. Ngay cả cái tên "fractal" cũng do Mandelbrot đặt ra, mượn chữ la tinh "fractus" có nghĩa gãy, vỡ, để nhắc tới hình ảnh gãy vỡ của Tập Cantor mà, như đã nói trên, có thể xem là fractal "nguyên thuỷ" và cũng là fractal được nghiên cứu kĩ trước tiên.



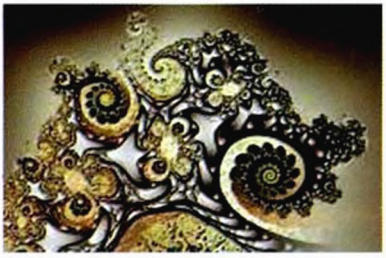
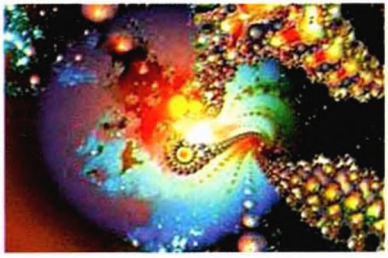
Sau khi ra đời, một mặt nhờ sự hỗ trợ của kĩ thuật đồ hoạ máy tính, Hình học fractal đã nhanh chóng tìm thấy nhiều ứng dụng quan trọng trong khắp các lĩnh vực. Mặt khác, do tinh thần và phương pháp của nó khác hẳn những bộ phận toán học truyền thống ở đấy ảnh hưởng của chủ nghĩa trừu tượng hình

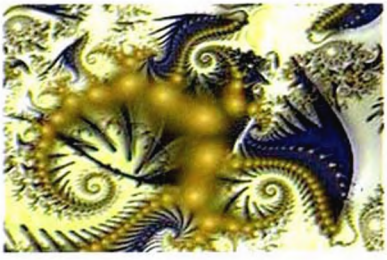
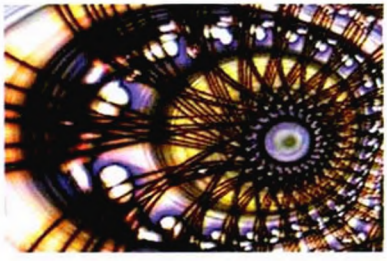
thức tuy còn mạnh nhưng đã bắt đầu suy yếu, nên nó cũng đã thu hút sự quan tâm và hưởng ứng của một lực lượng đông đảo các nhà khoa học. Từ vài chục năm nay fractal đã trở thành một trong các hướng phát triển thời sự của toán học hiện đại.

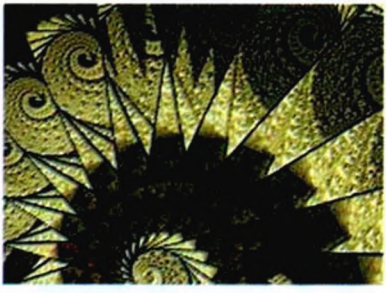
Benoit Mandelbrot là một nhà khoa học mà cuộc đời cũng độc đáo chẳng khác gì fractal mang tên ông. Năm 20 tuổi, thi đỗ vào trường đại học danh tiếng bậc nhất mà cũng là lò đào tạo nhân tài khoa học lỗi lạc của Pháp là École Normale Supérieure ở Paris, nhưng ông chỉ học ở đó đúng một ngày rồi chuyển sang học một trường đại học nổi tiếng khác là École Polytechnique (Đại Học Bách Khoa).

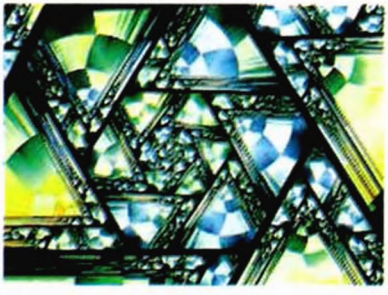
Suy ngẫm về hướng phát triển của toán học, ông không thích thú với các hướng đi chính thống của nền toán học Pháp thời ấy và cảm thấy cần có những thay đổi cách mạng trong quan niệm và phương pháp nghiên cứu toán học, nên sau khi học xong ở Pháp một thời gian ngắn, ông đã sang Mỹ và được hãng IBM nồng nhiệt tiếp nhận. Chính trong mười năm ở đây ông đã xuất bản những công trình khoa học đặc sắc khai sinh ra Hình học fractal, không chỉ xây dựng nó thành một ngành toán học có cơ sở lí thuyết vững chắc mà còn gợi ý phát triển nhiều ứng dụng thực tiễn đa dạng. Ngày nay, như chúng ta đã biết, ngành hình học mới này đã trở thành một công cụ nghiên cứu lí thú và có hiệu lực ở hầu hết các lĩnh vực khoa học và kĩ thuật, từ Toán học, Vật lí, Thiên văn học, Sinh lí học, Tâm lí học, Ngôn ngữ học, cho đến Công nghệ thông tin và truyền thông, Kinh tế, Tài chính, Kiến trúc, Xây dựng, ... Ngay cả âm nhạc, hội hoạ, nghệ thuật cũng tìm thấy ở Hình học fractal những nguồn cảm hứng mới. Do những cống hiến khoa học lỗi lạc đó, ông đã nhận được nhiều giải thưởng khoa học lớn, trong đó có giải thưởng Wolf là một giải thưởng có thể sánh với giải thưởng Nobel. Khi trao tặng ông giải thưởng này, người ta đã ca ngợi ông là nhân vật kiệt xuất đã "làm thay đổi cách nhìn của chúng ta về thiên nhiên và thế giới".

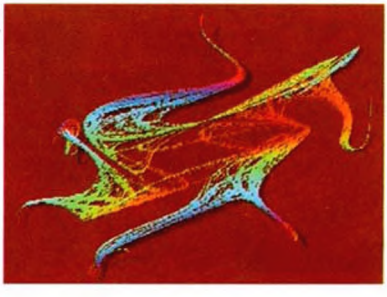
PHỤ LỤC

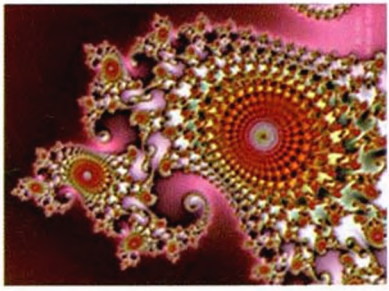



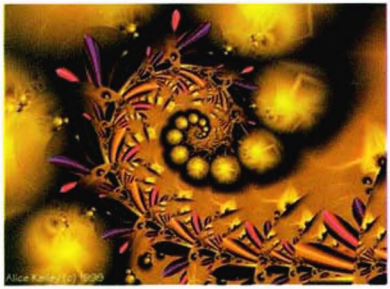



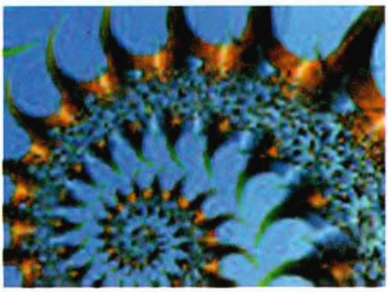
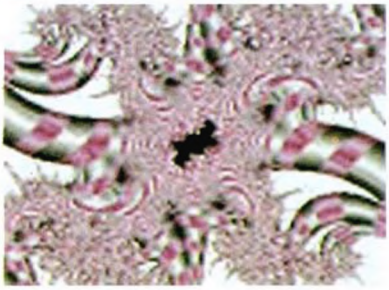


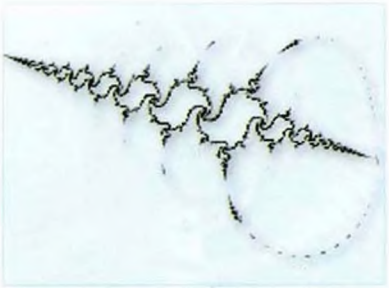


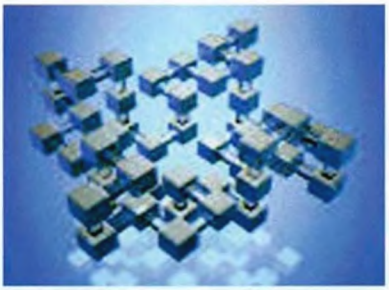


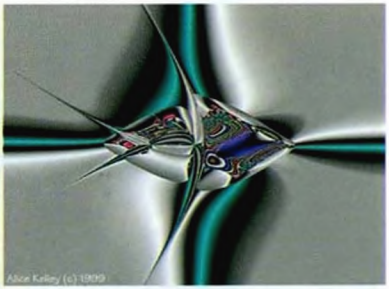


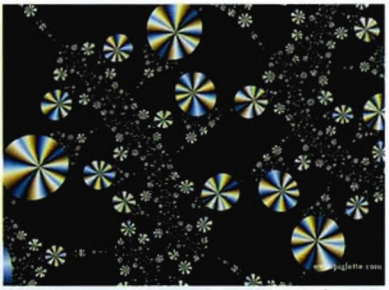


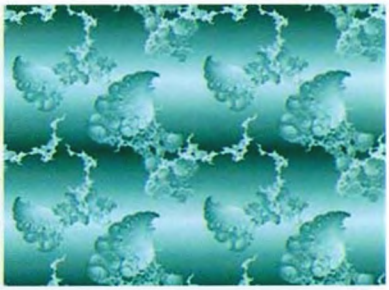



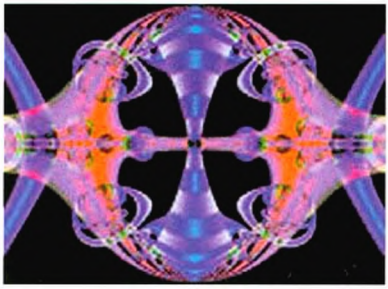
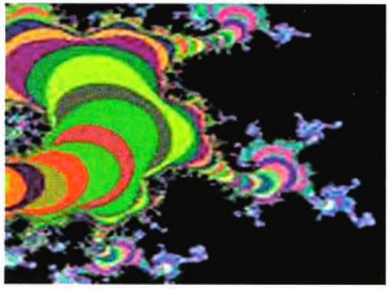
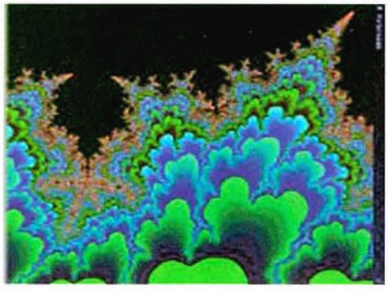
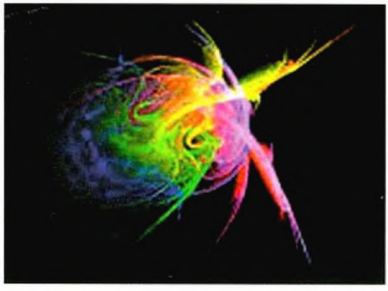


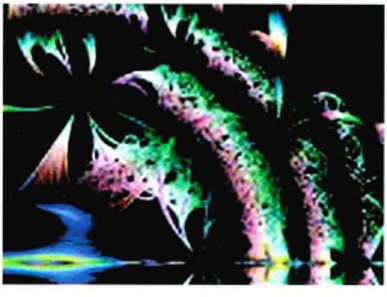



Alice Kelley (c) 1999







Tài liệu tham khảo

1. Bill Beaumont, Paul Scott, *The fractal Umbrella*, The Australian Association of Mathematics Teachers Inc., 1994.
2. Bjork Borg, Brolin Ljungstrom, Mathematik 2000, *Natur och Kultur*, Stockhom, 1993.
3. Ross Brodie, Stefan Swift, *Math 11c*, MoretonBay Publishing, Australia, 1995.
4. Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, JohnWiley & Sons, 1990.
5. Nguyễn Ngọc Giao, *Những điều kì thú về các hình thái hỗn loạn CHAOS*, Nhà xuất bản Giáo Dục 1998.
6. Stanley Gudder, *A Mathematical Journey, 2nd edition*, McGraw-Hill, 1994.
7. Cynthia Lanius, *Fractals*, URL http://math.rice.edu/lanius/frac/
8. Alain Le Mehauté, Raoul R. Nigmatullin, Laurent Nivanen, *Flèches du temps et géométrie fractale, 2e edition*, Hermes, 1998.
9. Benoit Mandelbrot, *A multifractal walk down Wall Street*, Scientific American, Feb. 1999, 70-73.
10. Benoit Mandelbrot, *Comment j'ai découvert les fractales*, La Recherche, Mai 2000, 84-86.
11. H-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, *Fractals for the Classroom: Strategic Activities*, Springer 1999.
12. Bernard Sapoval, *Universalités et fractales*, Flammarion, 1997.
13. Manfred Shroeder, *Fractals, Chaos, Power laws*, W.H. Freeman and Company, New York 1991
14. Hoàng Tụy, *Hình học fractal*, Bài giảng tại Viện Toán Học, Hà Nội, 2000.

TÌM HIỂU FRACTAL MỘT HÌNH HỌC MỚI LẠ

Mã số : 8H995m3 - CNH

In 5.000 bản, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Trần Phú, 71-75 Hai Bà Trưng, Q.1, TP. HCM. Số in 0857/03. Số xuất bản : 1043/7-03.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2003.

www.facebook/otoanhoc2911

PGS. NGƯT. Hoàng Chúng
sinh ngày 28 tháng 1 năm 1931.
Quê quán: xã Điện Quang,
huyện Điện Bàn, tỉnh Quảng Nam.
Tốt nghiệp khoa Toán - TrườngSư phạm cao cấp Tự nhiên năm 1953.
Chức vụ và nơi công tác: Nguyên Hiệu trưởng Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.
Được phong Phó Giáo sư năm 1980,
Nhà giáo ưu tú năm 1991.

HOÀNG CHÚNG
(1931-2002)

SÁCH ĐÃ XUẤT BẢN

Số học, bà chúa của Toán học
Graph và giải toán phổ thông
Logic học phổ thông
Phương pháp dạy học toán ở trường THCS
Đại cương về toán học hữu hạn
Những vấn đề logic trong môn toán ở THCS
Giải toán phổ thông trên máy tính
Phương pháp dạy học hình học ở THCS
Từ điển bách khoa phổ thông toán học - T1, T2
(đồng dịch giả)

8 934980 227626

Giá: 6.500đ